Bollettino Unione Matematica Italiana

Gaetano Fichera

Sui differenziali totali di qualsivoglia ordine

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.2, p. 105–108.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_2_105_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1948.

Sui differenziali totali di qualsivoglia ordine (*).

Nota di GAETANO FICHERA (a Roma).

Sunto. - *Si indicano le condizioni integrali da aggiungere alle locali per assicurare che in un campo a connessione lineare multipla un differenziale di grado* n *è il differenziale totale di una funzione uniforme.*

In una Nota del prof. PICONE apparsa in questo bollettino nel 1937 [1], trovasi dimostrato il seguente teorema:

Sia A *un campo dello spazio a* r *dimensioni. I numeri interi* $h_1, h_2, \dots, h_r$ *positivi o nulli abbiamo per somma* n *e siano assegnate le* $\binom{r+n-1}{n}$ *funzioni*

$$f_{h_1 h_2 \dots h_r}(x_1, x_2, \dots, x_r)$$
$$(h_1 + h_2 + \dots + h_r = n; \qquad h_1 . h_2, \dots, h_r = 0, 1, \dots n)$$

continue in ogni punto di A. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una funzione uniforme* F *dotata in ogni punto di* A *delle derivate parziali fino a quelle incluse di ordine* n, *per la quale si abbia*

$$(1) \qquad d^n F = \sum_{h_1 + \dots + h_r = n}^{0,n} \frac{n!}{h_1! \dots h_r!} f_{h_1 \dots h_r} dx_1^{h_1} \dots dx_r^{h_r}$$

è che per ogni curva C *semplice e chiusa, contenuta in* A, *riescano verificate le* $\binom{r+n-1}{n-1}$ *eguaglianze*

$$\int_C \sum_{s_1 + \dots + s_r = n-p}^{0,n-p} \frac{(n-p)!}{s_1! \dots s_r!} f_{h_1 + s_1 \dots h_r + s_r} d(x_1^{s_1} \dots x_r^{s_r}) = 0$$

$$(p = 0, 1, \dots, n-1; \qquad h_1 + h_2 + \dots + h_r = p; \qquad h_1, h_2, \dots h_r = 0, 1, \dots . p).$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto per le applicazioni del Calcolo.

(1) M. PICONE - *Sul criterio d'integrabilità delle forme differenziali di qualsivoglia grado* [B. U. M. I., anno XVI - N. 2 - aprile 1937].

Le condizioni necessarie e sufficiênti di tipo integrale, date nel teorema enunciato, prescindono dall'ordine di connessione del campo A. È ben noto, però, che, supposte le $f_{h_1 \ldots h_r}$ dotate di derivate parziali prime, possono darsi delle condizioni d'integrabilità di tipo locale, che riuscendo necessarie, non sempre sono sufficienti, dipendendo tale fatto dall'ordine di connessione lineare di A. Il Prof. PICONE indica nella citata nota, per il caso $r=2$, quali sono le ulteriori condizioni integrali da aggiungere a quelle locali per assicurare l'esistenza di una funzione uniforme F soluzione della (1). Tale indicazione può anche darsi per r qualsivoglia e il Prof. PICONE mi ha consigliato di scrivere esplicitamente le anzidette condizioni nel caso generale, dato che di sovente, in ricerche di Analisi e di Fisica matematica, càpita di dover far uso di esse.

Richiamiamo alcune definizioni relative alla connessione lineare del campo A. Dicesi che una curva regolare chiusa C, contenuta in A, è *omologa a zero* in A se esiste una superficie continua e regolare aperta, contenuta A, il cui bordo coincide con la C. Due curve chiuse di A diconsi fra loro *omologhe* (su A) se esiste una superficie continua e regolare aperta di A il cui bordo è costituito da dette curve.

Date ν curve chiuse $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$, contenute in A, diremo che esse sono *indipendenti* su A, se, comunque si consideri un numero $\nu' \leq \nu$ di esse, non esiste nessuna superficie aperta di A il cui bordo coincide con esse, nè ciò avviene se si sostituiscono alcune o tutte le curve con curve ed esse omologhe. Il campo A ha semplice o di ordine zero la connessione lineare se ogni sua curva è omologa a zero. Il campo A ha di ordine μ la connessione lineare, se il numero massimo delle curve chiuse indipendenti, che si possono determinare in esso, è uguale a μ. Un sistema di μ curve chiuse indipendenti di A dicesi un *sistema fondamentale* di curve di A. Un sistema siffatto è tale che, comunque si consideri una curva chiusa di A, non omologa a zero, e al sistema non appartenente, essa assieme ad un certe numero $\mu' \leq \mu$ di curve del sistema costituisce il bordo di una superficie aperta contenuta in A.

Se Σ è una superficie continua regolare aperta, indicheremo con $B\Sigma$ il suo bordo. Dette $X_1, X_2, \ldots, X_r$, funzioni continue e dotate di derivate parziali prime continue nel campo A, contenente Σ, è a tutti noto che sussiste il teorema di STOKES, secondo cui

$$\int_{B\Sigma} \sum_{i=1}^{r} X_i dx_i = \int_{\Sigma} \sum_{i<j}^{1,r} \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j .$$

Esso è suscettibile della seguente formale generalizzazione.

Assegnate in A $\binom{r+k-1}{k}$ funzioni

$$X_{s_1 s_2 \dots s_r}(x_1, x_2, \dots, x_r)$$
$$(s_1 + s_2 + \dots + s_r = k\,; \qquad s_1, s_2, \dots, s_r = 0,1, \dots, k)$$

continue e dotate di derivate parziali prime continue sussiste, per ogni superficie regolare aperta Σ *contenuta in* A, *la seguente formula*

$$(2) \qquad \int_{B\Sigma} \sum_{s_1+\dots+s_r=k}^{0,k} \frac{k!}{s_1!\dots s_r!} X_{s_1\dots s_r}\, d(x_1^{s_1}\dots x_r^{s_r}) =$$
$$= \int_{\Sigma} \sum_{i<j}^{1,r} \sum_{p_1+\dots+p_r=k-1}^{0,k-1} \frac{k!}{p_1!\dots p_r!} x_1^{p_1}\dots x_r^{p_r} \left(\frac{\partial X_{p_1\dots p_j+1\dots p_r}}{\partial x_i} - \frac{\partial X_{p_1\dots p_i+1\dots p_r}}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j .$$

Si ha infatti

$$\int_{B\Sigma} \sum_{s_1+\dots+s_r=k}^{0,k} \frac{k!}{s_1!\dots s_r!} X_{s_1\dots s_r}\, d(x_1^{s_1}\dots x_r^{s_r}) =$$
$$= \int_{B\Sigma} \sum_{s_1+\dots+s_r=k}^{0,k} \sum_{i=1}^{r} \frac{k!}{s_1!\dots(s_i-1)!\dots s_r!} x_1^{s_1}\dots x_i^{s_i-1}\dots x_r^{s_r} X_{s_1\dots s_r} dx_i =$$
$$= \int_{\Sigma} \sum_{s_1+\dots+s_r=k}^{0,k} \sum_{i<j}^{1,r} \left(\frac{k!}{s_1!\dots(s_j-1)!\dots s_r!} x_1^{s_1}\dots x_j^{s_j-1}\dots x_r^{s_r} \frac{\partial X_{s_1\dots s_r}}{\partial x_i} - \right.$$
$$\left. - \frac{k!}{s_1!\dots(s_i-1)!\dots s_r!} x_1^{s_1}\dots x_i^{s_i-1}\dots x_r^{s_r} \frac{\partial X_{s_1\dots s_r}}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j =$$
$$= \int_{\Sigma} \sum_{i<j}^{1,r} \sum_{p_1+\dots+p_r=k-1}^{0,k-1} \frac{k!}{p_1!\dots p_r!} x_1^{p_1}\dots x_r^{p_r} \left(\frac{\partial X_{p_1\dots p_j+1\dots p_r}}{\partial x_i} - \frac{\partial X_{p_1\dots p_i+1\dots p_r}}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j .$$

Da ciò segue in modo ovvio la dimostrazione del seguente teorema.

Supposto che in ogni punto di A *siano verificate le seguenti condizioni.*

$$(3) \qquad \frac{\partial f_{k_1\dots k_j+1\dots k_r}}{\partial x_i} = \frac{\partial f_{k_1\dots k_i+1\dots k_r}}{\partial y_j}$$
$$(k_1 + k_2 + \dots + k_r = n-1\,; \qquad k_1, k_2, \dots, k_r = 0,1, \dots, n-1)$$

è che A *abbia connessione lineare finita di ordine* μ, *condizione necessaria e sufficiente perchè esista una funzione* F *verificante la* (1), *è che, dette* $C_1, C_2, \dots, C_\mu$ *curve chiuse costituenti un sistema fondamentale di curve di* A, *siano verificate le seguenti* $\mu\binom{r+n-1}{n-1}$

eguaglianze

$$\int_{C_i} \sum_{s_1+\ldots+s_r=n-p}^{0,n-p} \frac{(n-p)!}{s_1!\ldots s_r!} f_{h_1+s_1\ldots h_r+s_r}\, d(x_1^{s_1}\ldots x_r^{s_r}) = 0$$

$$(i = 1,2,\ldots,\mu)$$

$(p = 0,1,\ldots,n-1\,; \quad h_1+h_2+\ldots+h_r = p\,; \quad h_1, h_2, \ldots, h_r = 0,1,\ldots,p)$.

La necessità della condizione è ovvia, La sufficienza segue dall' applicazione della (2) e della (3).