Bollettino Unione Matematica Italiana

Mario Villa

Un fascio di quintiche collegato alle trasformazioni puntuali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.1, p. 8–15.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_1_8_0>

Un fascio di quintiche collegato alle trasformazioni puntuali.

Nota di MARIO VILLA (a Bologna) (*).

Sunto. - *Si dimostra che l'intorno del 3° ordine di una trasformazione puntuale fra due piani, in una coppia* $O, \bar{O}$ *regolare di punti corrispondenti, determina un certo fascio di quintiche. Fra le quintiche del fascio hanno particolare interesse quelle che si spezzano in una retta caratteristica e in una quartica. Mediante queste quartiche si hanno subito riferimenti intrinseci nei vari casi.*

1. Segnalo qui un fascio di quintiche collegato alle trasformazioni puntuali T fra due piani π, $\bar{\pi}$ in una coppia di punti corrispondenti $O, \bar{O}$ (a Jacobiano $\neq 0$). A tale fascio si perviene nel modo seguente: si considerino gli $E_3{}^*$ di centro O corrispondenti in T agli E_3 di flesso di seconda specie di centro $\bar{O}$; per ogni retta t uscente da O è individuato l'$E_3{}^*$ di tangente t. D'altra parte l'$E_3{}^*$ individua una proiettività fra il fascio di rette di centro O e la punteggiata di sostegno t [1].

Si ha così in definitiva. per ogni retta t del fascio O, una proiettività P_t fra lo stesso fascio O e la punteggiata t. Orbene, si dimostra (n. 2): *Il luogo del punto* A *di* t *corrispondente in* P_t *ad una retta fissa* a *del fascio* O, *al variare di* t, *è una quintica.* E corrispondentemente alle ∞^1 rette a del fascio O si ha un *fascio di quintiche* (n. 2). Ogni quintica del fascio (se le direzioni carat-

(5) O. CHISINI: *Sulla identità birazionale delle funzioni algebriche di due variabili dotate di una medesima curva di diramazione.* « Rend. Ist. Lomb. », vol. LXXVII.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(1) È noto che un E_3 piano di centro O determina una proiettività fra il fascio di rette di centro O e la punteggiata avente per sostegno la sua tangente. La proiettività è quella subordinata dalla polarità rispetto ad una (qualsiasi) delle ∞^1 coniche contenenti l'E_3. Si veda: BOMPIANI, *Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei*, « Rend. dell'Accademia dei Lincei », ser. VI, vol. XXII, p. 483, 1935.

teristiche non sono indeterminate) ha punto quadruplo in O e per tangenti ivi le tre rette caratteristiche e la retta a (n. 2). Se a è una delle rette caratteristiche la quintica relativa si spezza in a e in una *quartica* avente punto triplo in O e per tangenti ivi le tre rette caratteristiche (n. 2). Queste quartiche (che dirò pure *caratteristiche*) sono tre, due, oppure una sola secondo che le tre direzioni caratteristiche sono tutte tre distinte, due coincidono, oppure coincidono tutte tre (nn. 3, 4, 5).

Mediante le quartiche caratteristiche è immediata la determinazione dei riferimenti intrinseci di T in tutti e tre i casi (nn. 3, 4, 5) (²).

I flessi delle quartiche caratteristiche, le loro bitangenti, e così ogni altro ente geometrico collegato ad esse, costituiscono una *configurazione* collegata a T che forse meriterebbe di essere studiata, il che qui non vien fatto.

2. *Il fascio di quintiche e le quartiche caratteristiche.* – Consideriamo fra due piani π, $\bar{\pi}$ una trasformazione puntuale T e sia O, $\bar{O}$ una coppia di punti corrispondenti (a Jacobiano $\neq 0$).

(²) Per il caso delle direzioni caratteristiche distinte, riferimenti intrinseci sono già stati ottenuti da Bompiani e da me. Il Bompiani vi pervenne introducendo l'involuzione delle direzioni d'iperosculazione (Bompiani, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi*, « Atti dell'Accademia d'Italia », vol. XIII, p. 837, 1942).

Recentemente io vi pervenni in modo più rapido considerando gli E_3^* corrispondenti agli E_3 di flesso di 2ª specie e le proiettività da essi determinate (Villa, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari.* – II. *Intorno del* 3° *ordine. Riferimenti intrinseci*, « Rend. dell'Accademia dei Lincei », Ser. VIII, vol. IV, 1948). Il procedimento da me seguito in tale Nota non è però estendibile al caso delle direzioni caratteristiche coincidenti. Lo studio del caso delle direzioni caratteristiche coincidenti fu da me proposto, fin dal 1942, ad una mia assistente che però non potè occuparsene. Studiai allora io l'argomento e pubblicai una Nota (Villa, *Sulle trasformazioni puntuali con direzioni caratteristiche coincidenti*, « Rend. dell'Istituto Lombardo », vol. LXXVIII, p. 321, 1944-45). Finita la guerra venni a conoscenza che l'argomento era stato studiato, nel 1944, al di là della linea gotica, da Laura Farina (*Contributo allo studio locale delle trasformazioni puntuali fra due piani*, « Acta Pontificia Academia Scientiarum », vol. VIII, p. 19, 1944). Sia nella mia Nota dell'Ist. Lomb. che in quella della Farina si ricorre, per la determinazione dei riferimenti intrinseci, all'involuzione delle direzioni d'iperosculazione. Nella mia Nota si dà anche una costruzione geometrica delle trasformazioni quadratiche osculatrici del tipo di quella già da me data nel caso delle direzioni caratteristiche distinte. In tal caso la costruzione si fa a partire dalle proiettività caratteristiche da me introdotte.

Assumendo in sistemi di coordinate proiettive non omogenee x, y per π e $\bar{x}, \bar{y}$ per $\bar{\pi}$, $O, \bar{O}$ come origini e come rette $\bar{y}=0, \bar{x}=0$, $\bar{x}=\bar{y}$ risp. le corrispondenti di $y=0$, $x=0$, $x=y$ nella proiettività fra i fasci $O, \bar{O}$ subordinata da T, le equazioni di T si scrivono

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \alpha x + \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + [4], \\ \bar{y} &= \alpha y + \psi_2(x, y) + \psi_3(x, y) + [4], \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove

$$\varphi_2 = a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2, \quad \psi_2 = b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + b_{02}y^2,$$
$$\varphi_3 = a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3, \quad \psi_3 = b_{30}x^3 + 3b_{21}x^2y + 3b_{12}xy^2 + b_{03}y^3,$$

le a, b ed α costanti ($\alpha \neq 0$) e indicando con [4] i termini negli sviluppi (2.1) di grado > 3.

Ad un $\bar{E}_3$ di flesso $\bar{y}=k\bar{x}$ corrisponde in T l'E_3^*

$$y = kx + qx^2 + rx^3, \tag{2.2}$$

dove

$$\begin{aligned} \alpha q &= k\varphi_2(1, k) - \psi_2(1, k), \\ \alpha^2 r &= \alpha[k\varphi_3(1, k) - \psi_3(1, k)] + 2[k\varphi_2(1, k) - \psi_2(1, k)][a_{02}k^2 + (a_{11} - b_{02})k - b_{11}]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

La proiettività individuata da E_3^* fra i punti (x, kx) della sua tangente $y = kx$ e le rette $y = \lambda x$ del fascio di centro O ha l'equazione

$$x = \frac{(\lambda - k)q}{r(\lambda - k) + 2q^2}; \tag{2.4}$$

alla retta $y = \lambda x$ corrisponde quindi il punto

$$\begin{aligned} x &= \frac{(\lambda - k)q}{r(\lambda - k) + 2q^2}, \\ y &= kx. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Tenendo fisso λ, al variare di k, il punto (2.5) descrive una curva di cui le (2.5) sono le equazioni parametriche. L'equazione della curva si ottiene eliminando k fra le (2.5), tenute presenti le (2.3). Si trova

$$\begin{aligned} &\alpha y(y\varphi_2 - x\psi_2 - y\varphi_3 + x\psi_3) - 2(y\varphi_2 - x\psi_2)[b_{20}x^2 + (b_{11} - a_{20})xy - a_{11}y^2] - \\ &- \lambda\,\{\alpha x(y\varphi_2 - x\psi_2 - y\varphi_3 + x\psi_3) - 2(y\varphi_2 - x\psi_2)[a_{02}y^2 + (a_{11} - b_{02})xy - b_{11}y^2]\} = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

La curva è quindi una quintica e se le rette caratteristiche [3] non sono indeterminate, cioè se $y\varphi_2 - x\psi_2 \not\equiv 0$, la quintica ha punto quadruplo in O e ha ivi per tangenti $(y - \lambda y)(y\varphi_2 - x\psi_2) = 0$, ossia

[3] Per la definizione delle direzioni caratteristiche, si veda: VILLA, *Direzioni d'osculazione e d'iperosculazione di due trasformazioni puntuali*, questo « Bollettino », ser. III, vol. II, p. 191, 1947.

la retta $y = \lambda x$ e le tre rette caratteristiche $y\varphi_2 - x\psi_2 = 0$. Al variare di λ, la quintica descrive il fascio di equazione (2.6).

I punti base del fascio sono tutti raccolti in O. Quando (e solo quando) l'$E_3{}^*$ di equazione (2.2) è di flesso ($q = 0$) la proiettività (2.4) è degenere (in essa ad ogni retta del fascio, $\neq$ dalla tangente $y = kx$, corrisponde il punto O, mentre ad ogni punto della $y = kx$, $\neq O$, corrisponde la $y = kx$). D' altra parte l'$E_3{}^*$ è di flesso solo quando la $y = kx$ è direzione caratteristica. Segue che se la retta $y = \lambda x$ è una delle rette caratteristiche, e solo allora, la quintica (2.6) si spezza nella $y = \lambda x$ e in una quartica avente in O punto triplo e avente in O per tangenti le tre rette caratteristiche. Ciò del resto è evidente anche analiticamente dalla (2.6) perchè allora $y\varphi_2 - x\psi_2$ è divisibile per $y - \lambda x$.

Rimane da esaminare il caso in cui le direzioni caratteristiche sono indeterminate. Ho dimostrato ([4]) che in tale ipotesi esistono quattro direzioni d'iperosculazione, di equazione $y\varphi_3 - x\psi_3 = 0$, per le quali ogni E_3 di flesso di seconda specie, avente una di tali direzioni, viene mutato da T ancora in un E_3 di flesso di 2ª specie. D'altra parte se $E_3{}^*$ è di flesso di 2ª specie (cioè $q = r = 0$) nella (2.4) ad ogni retta del fascio $y = \lambda x$ corrisponde un punto generico della tangente $y = kx$. Segue che quando le direzioni caratteristiche sono indeterminate la quintica relativa alla retta $y = \lambda x$ si spezza nella retta stessa e nella quaterna delle rette d'iperosculazione. Ciò si deduce del resto anche analiticamente poichè il fascio (2.6), se $y\varphi_2 - x\psi_2 \equiv 0$, si riduce a

$$(y - \lambda x)(y\varphi_3 - x\psi_3) = 0.$$

Nel seguito supporremo che le direzioni caratteristiche non siano indeterminate.

3. *Caso delle tre direzioni caratteristiche distinte.* - Assumiamo le tre rette caratteristiche di $\bar{\pi}$ come rette $y = 0$, $x = 0$, $x = y$, come *punti impropri* sulle $\bar{y} = 0$, $\bar{x} = 0$ rispettivamente i corrispondenti nelle relative proiettività caratteristiche dei punti impropri delle $y = 0$, $x = 0$, come punto -1, -1 su $\bar{\pi}$ il corrispondente del punto improprio di $\bar{x} = \bar{y}$ nella relativa proiettività caratteristica e come punto 1,1 di π il corrispondente del punto improprio di $x = y$ nella relativa proiettività caratteristica ([5]).

([4]) VILLA, op. cit. nella ([3]), p. 194.

([5]) Per la definizione delle proiettività caratteristiche: VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari.* - I. *Intorno del 2° ordine*, « Rend. dell' Accademia dei Lincèi », ser. VIII, vol. IV, p. 55, 1948. La scelta fatta degli elementi di riferimento è possibile non essendo le direzioni caratteristiche indeterminate.

Ormai, per fissare intrinsecamente i riferimenti, basta fissare intrinsecamente in π la *retta impropria*. Occorre perciò passare all'intorno del 3° ordine. Le equazioni (2.1) di T divengono

$$\bar{x} = x - xy + \varphi_3 + [4],$$
$$\bar{y} = y - xy + \psi_3 + [4].$$

La quartica caratteristica relativa alla retta caratteristica $y = 0$ è

$$xy(x - y)(1 + x - y) - y\varphi_3 + x\psi_3 = 0.$$

Assumendo come retta impropria in π ad es. una delle quattro bitangenti della quartica, posto $\alpha = 1 - a_{30} + 3b_{21}$, $\beta = 1 - 3a_{12} + b_{03}$, si ha

$$a_{03} = -b_{30}\frac{\beta^2}{\alpha^2}, \qquad 3(b_{12} - a_{21}) = \frac{\alpha^3 + 8\beta b_{30}^2}{4\alpha b_{30}} + 2.$$

Con ciò nei due piani sono fissati riferimenti intrinseci e le equazioni canoniche di T sono

$$\bar{x} = x - xy + a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 - b_{30}\frac{\beta^2}{\alpha^2}y^3 + [4],$$
$$\bar{y} = y - xy + b_{30}x^3 + (\alpha + a_{30} - 1)x^2y + \left(3a_{21} + \frac{\alpha^3 + 8\beta b_{30}^2}{4\alpha b_{30}} + 2\right)xy^2 +$$
$$+ (\beta + 3a_{12} - 1)y^3 + [4]$$

(a_{30}, a_{21}, a_{12}, b_{30}, α, β invarianti).

La quartica caratteristica relativa alla $y = 0$ è

$$F \equiv xy(x - y) + b_{30}x^4 + \alpha x^3y + \frac{\alpha^3 + 8\beta b_{30}^2}{4\alpha b_{30}}x^2y^2 + \beta xy^3 + b_{30}\frac{\beta^2}{\alpha^2}y^4 = 0.$$

Il fascio di quintiche è

$$yF - \lambda x[F - 2xy(x - y)^2] = 0.$$

Le altre due quartiche caratteristiche, relative alla $x = 0$ e alla $x = y$, sono rispettivamente

$$F - 2xy(x - y)^2 = 0, \qquad F - 2x^2y(x - y) = 0.$$

Si potrebbero considerare le quattro bitangenti, i sei flessi, le tangenti inflessionali di ciascuna delle tre quartiche, ecc. [6].

(6) Il significato geometrico dei tre invarianti b_{30}, α, β si ha subito ad es. considerando i punti ($\neq O$) in cui la $F = 0$ è intersecata da tre rette per O (individuate nel fascio O mediante i birapporti che formano con $x = 0$, $y = 0$, $x = y$). Per gli altri invarianti della trasformazione si veda: VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*. - IV. *Direzioni caratteristiche. Invarianti del 2° e del 3° ordine*, « Rend. dell'Accademia dei Lincei », ser. VIII, vol. V, 1948.

4. *Caso in cui due direzioni caratteristiche coincidono.* – Assumiamo come $y = 0$ la retta in cui coincidono due rette caratteristiche, come $x = 0$ l'altra retta caratteristica, come punti impropri sulle $\bar{y} = 0$, $\bar{x} = 0$ rispettivamente i corrispondenti nelle relative proiettività caratteristiche dei punti impropri delle $y = 0$, $x = 0$, come punto unità in $\bar{\pi}$ il corrispondente del punto unità in π nell'omografia fra π, $\bar{\pi}$ che subordina fra le due coppie di rette caratteristiche le proiettività caratteristiche.

Le trasformazioni quadratiche osculatrici ($t \cdot q \cdot o$) la T in O, $\bar{O}$ sono ∞^0 e i loro punti singolari appartengono alle rette caratteristiche. Di più: i punti singolari di una $t \cdot q \cdot o$ appartenenti alle $x = 0$, $\bar{x} = 0$ si corrispondono in una proiettività (la *proiettività singolare*) (7). Orbene, assumiamo come punto $- 1$ su $x = 0$ il corrispondente nella proiettività singolare del punto improprio di $\bar{x} = 0$.

Ormai per fissare intrinsecamente i riferimenti nei due piani basta fissare intrinsecamente in π la *retta impropria* e la retta $x = y$.

Occorre passare all'intorno del 3° ordine. Le equazioni (2.1) di T divengono

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x - xy + \varphi_3 + [4], \\ \bar{y} &= y + \qquad \psi_3 + [4]. \end{aligned}$$

La quartica caratteristica relativa alla $y = 0$ è

$$xy^2 - xy^3 + y\varphi_3 - x\psi_3 = 0.$$

Le rette proiettanti da O i quattro flessi della quartica sono

$$a_{03}y^4 - (3b_{21} - a_{30})x^3y - 3b_{30}x^4 = 0.$$

Assumendo una di queste rette come $x = y$ si ha $a_{03} + a_{30} = 3b_{30} + 3b_{21}$. Inoltre imponiamo che il flesso della $x = y$ sia all'infinito [sicchè $\varphi_3(1, 1) - \psi_3(1, 1) = 1$, ossia $a_{30} + a_{03} + 3a_{21} + 3a_{12} = b_{30} + b_{03} + 3b_{21} + 3b_{12} + 1$] e assumiamo come retta impropria la relativa tangente inflessionale (sicchè $3a_{30} + 6a_{21} + 3a_{12} = 4b_{30} + 9b_{21} + 6b_{12} + b_{03} + 1$).

Con ciò nei due piani sono fissati riferimenti intrinseci e le

(7) Si veda: VILLA, il secondo dei lavori cit. nella (2), p. 325. Considerando le quartiche caratteristiche, le $t \cdot q \cdot o$ si potrebbero evitare, rendendo più rapido il procedimento. Siccome però certi elementi dei riferimenti si possono fissare intrinsecamente considerando il solo intorno del 2° ordine, per essi non ho creduto di ricorrere alle quartiche caratteristiche che sono definite dall'intorno del 3°. Analoga osservazione vale per il n. 5.

equazioni canoniche di T sono

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x - xy + (3b_{30} + 3b_{21} - a_{03})x^3 + (-3b_{30} + 3b_{12} + 3a_{03})x^2y + \\ &\quad + (b_{30} + b_{03} - 3a_{03} + 1)xy^2 + a_{03}y^3 + [4], \\ \bar{y} &= y + b_{30}x^3 + 3b_{21}x^2y + 3b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 + [4]\end{aligned}$$

(a_{03}, b_{30}, b_{21}, b_{12}, b_{03} invarianti).

La quartica caratteristica relativa alla $y = 0$ è

$$\begin{aligned}\Phi \equiv xy^2 - b_{30}x^4 - (a_{03} - 3b_{30})x^3y + 3(a_{03} - b_{30})x^2y^2 - \\ - (3a_{03} - b_{30})xy^3 + a_{03}y^4 = 0.\end{aligned}$$

Il fascio di quintiche è

$$y\Phi - \lambda x(\Phi + 2xy^3) = 0,$$

e l'altra quartica caratteristica è $\Phi + 2xy^3 = 0$.

Si potrebbero considerare le due bitangenti della $\Phi = 0$, i rimanenti flessi e le relative tangenti inflessionali, le due bitangenti e i quattro flessi dell'altra quartica caratteristica, ecc. ([8]).

5. *Caso delle direzioni caratteristiche coincidenti.* - Assumiamo come $y = 0$ la retta in cui coincidono le tre rette caratteristiche, come punti 1 e infinito su $\bar{y} = 0$ i corrispondenti nella proiettività caratteristica $\mathcal{S}$ rispettivamente dei punti 1 e infinito della $y = 0$.

Le trasformazioni quadratiche osculatrici ($t \cdot q \cdot o$) la T in O, $\bar{O}$ sono ∞^2. In π i punti singolari di una $t \cdot q \cdot o$ costituiscono un $\bar{E}_2$ col centro su $y = 0$. Analogamente in $\bar{\pi}$ e i centri dei due E_2 singolari si corrispondono in $\mathcal{S}$.

Si dimostra che: *le* t · q · o *subordinano tutte una medesima proiettività* γ *fra le direzioni uscenti da due punti fissi delle* $y = 0$, $\bar{y} = 0$ *corrispondenti in* $\mathcal{S}$. E inoltre che: *le* ∞^1 *proiettività* γ *sono subordinate da una stessa omografia* Ω. Orbene, assumiamo come retta impropria di $\bar{\pi}$ la corrispondente in Ω della retta impropria di π (in Ω si corrispondono allora i punti unità), come punto unità in π un punto appartenente alla conica tangente alla retta impropria nel punto improprio di $y = 0$ e contenente l'E_2 corrispondente all'$\bar{E}_2$ di flesso $\bar{x} = 0$. Ormai per fissare intrinsecamente i riferimenti nei due piani basta fissare intrinsecamente in π le rette $x = 0$, $x = y$

([8]) Il significato geometrico dei due invarianti a_{03}, b_{30} si ha subito ad es. considerando i punti ($\neq O$) in cui la $\Phi = 0$ è intersecata da due rette per O (individuate nel fascio O mediante i birapporti che formano con $x = 0$, $y = 0$, $x = y$). Per gli altri invarianti della trasformazione: VILLA, il 2° lavoro cit. nella ([2]), p. 331.

e la retta impropria. Occorre passare all'intorno del 3° ordine. Le equazioni (2.1) di T divengono

$$\bar{x} = x - y^2 + \varphi_3 + [4],$$
$$\bar{y} = y + \psi_3 + [4].$$

Si ha qui un'unica quartica caratteristica di equazione

$$y^3 + y\varphi_3 - x\psi_3 = 0.$$

Le rette proiettanti da O i due flessi della quartica sono

$$2b_{30}x^2 + (3b_{21} - a_{30})xy + (b_{12} - a_{21})y^2 = 0.$$

Assumendo queste rette come $x = 0$ e come $x = y$ si ha $a_{21} = b_{12}$, $a_{30} = 2b_{30} + 3b_{21}$.

Assumiamo come punto all'infinito della $x = 0$ il flesso della quartica (sicchè $a_{03} = 0$) e come *retta impropria* la relativa tangente inflessionale (sicchè $b_{03} = 3a_{12}$). Con ciò nei due piani sono fissati riferimenti intrinseci e le equazioni canoniche di T sono

$$\bar{x} = x - y^2 + a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + [4],$$
$$y = y + b_{30}x^3 + (a_{30} - 2b_{30})x^2y + 3a_{21}xy^2 + 3a_{12}y^3 + [4]$$

(a_{30}. a_{21}, a_{12}, b_{30} invarianti). La quartica caratteristica è

$$\Psi \equiv y^3 - b_{30}x^3(x - 2y) = 0.$$

Il fascio di quintiche è $y\Psi - \lambda(x\Psi + 2y^5) = 0$.

Il flesso della quartica appartenente alla $x = y$ è $\left(-\frac{1}{b_{30}}, -\frac{1}{b_{30}}\right)$ e porge quindi il significato geometrico dell'invariante b_{30}. Si potrebbe considerare la bitangente della quartica, la tangente inflessionale in $\left(-\frac{1}{b_{30}}, -\frac{1}{b_{30}}\right)$, ecc.