Bollettino
Unione Matematica Italiana

Pasquale Ceravolò

Su la scissione di un numero nella somma di altri due detti "nuclei" e su alcune peculiari proprità di essi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.1, p. 71–78.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_1_71_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1948.

Su la scissione di un numero nella somma di altri due detti " nuclei „ e su alcune peculiari proprietà di essi.

Nota di PASQUALE CERAVOLÒ (a Bergamo).

Sunto. - *Si scinde un numero in due nuclei (positivo e negativo), i quali forniscono i caratteri di divisibilità per qualsiasi numero primo, palesano una nuova relazione fra due numeri uno multiplo dell'altro, offrono un nuovo procedimento per riconoscere se un numero è primo.*

In questa nota trovo delle formole, mediante le quali ogni numero, primo con la base del sistema di numerazione, può essere scisso nella somma di due altri, detti *nuclei,* ed ho tratto da essi i caratteri di divisibilità di un numero intero per qualsiasi numero

primo, enunciando quindi una regola generale di divisibilità. Infine ho esaminato una peculiarità dei *nuclei*, dalla quale deriva che, per assicurarsi se un numero è primo o no, basta risolvere al massimo quattro sistemi di congruenze, modificando e semplificando in tal modo la notissima regola di LEONARDO PISANO.

La nota, concretata circa un ventennio fa, non fu pubblicata, perchè mi ero proposto di realizzare un lavoro organico e di un certo interesse sui *nuclei* del numero. Difficoltà, incontrate nelle ricerche e non superate neppure col sussidio di valenti studiosi, e successive deviazioni dell'attività intellettuale in altri campi, lasciarono il lavoro incompleto in un angolo della scrivania, anche quando il prof. SBRANA dell'Università di Genova, trovate empiricamente alcune formule che davano i caratteri di divisibilità dei numeri, le presentava ai Soci della *Mathesis* (credo nel 1932) perchè ne spiegassero l'origine della virtù magica di esse.

Un amico studioso, a conoscenza della mia fatica, il quale si adopera da qualche tempo a superare le difficoltà da me accennate, mi segnala una Nota di JEAN PIERRE ZAHLEN, *Sur un caractère général de divisibilité* apparsa su *Euclides* di Madrid (Tom. VI, luglio-agosto 1946); e solo ora mi decido a trarre dall'ombra questo scritto, non per desiderio di merito, ma per non far torto ai miei appassionati studi di altri tempi, e con la lusinga che esso possa dar motivo di fruttuose ricerche agli studiosi.

1. TEOREMA. - Indicando con N un numero intero, con a la sua ultima cifra a destra, con B la base del sistema di numerazione e con N_1 il numero a cui si perviene, aggiungendo al numero, formato dalle cifre che precedono a, il prodotto di questa per un opportuno numero x, BN_1 è congruo con N rispetto a p (N e p primi con B), del quale x è una parte da determinare.

Stabilita l'uguaglianza

$$\text{(A)} \qquad \frac{N-a}{B} + ax = N_1$$

cioè

$$BN_1 - N = a(Bx - 1),$$

si ricava la congruenza

$$BN_1 \equiv N. \qquad \text{(mod. } (Bx-1)\text{)}$$

E se si pone

$$\text{(1)} \qquad Bx - 1 = py$$

dove p è un qualunque numero intero, primo con la base B del sistema di numerazione, possiamo scrivere

$$BN_1 \equiv N \qquad \text{(mod. } p\text{)}$$

secondo l'asserto.

2. Ripetendo su N_1 le operazioni eseguite su N, si ottiene un N_2 tale che

$$BN_2 \equiv N_1 \pmod{p}$$

cioè

$$B^2N_2 \equiv N. \pmod{p}$$

E così operando iteratamente per k volte, si perviene alla congruenza

$$B^kN_k \equiv N, \pmod{p}$$

dalla quale si deduce che, per provare se N sia divisibile per p, basta verificare che lo sia N_k, per la condizione posta di essere p primo con B.

3. Sussistendo quest'ultima condizione, la (1) ammette infinite soluzioni intere, e quindi da essa possiamo ricavare una successione di valori della x, formata, com'è noto, da una progressione aritmetica con ragione p.

4. Limitandoci al sistema di numerazione decimale, per cui la (1) diviene

$$10x - 1 = py$$

e quindi

$$x = \frac{py + 1}{10}, \tag{1'}$$

osserviamo che p, per essere primo con 10, dovrà terminare per 1, 3, 7, 9. E perchè il binomio $py + 1$ risulti multiplo di 10, volendo ottenere per x un valore intero, occorre che y in corrispondenza abbia come cifra finale 9, 3, 7, 1.

5. Se nella (1') si sostituisce p con una delle espressioni generali dei numeri che terminano per 1, 3, 7, 9, e cioè con $10n + 1$, $10n + 3$, $10n + 7$, $10n + 9$, dove n è il numero delle diecine di p, ponendo per y in corrispondenza i rispettivi valori (n_1 diecine di y), si hanno i seguenti valori di x:

$$x_{(1)} = \frac{(10n + 1)(10n_1 + 9) + 1}{10} = 10nn_1 + n_1 + 9n + 1$$

$$x_{(3)} = \frac{(10n + 3)(10n_1 + 3) + 1}{10} = 10nn_1 + 3n_1 + 3n + 1$$

$$x_{(7)} = \frac{(10n + 7)(10n_1 + 7) + 1}{10} = 10nn_1 + 7n_1 + 7n + 5$$

$$x_{(9)} = \frac{(10n + 9)(10n_1 + 1) + 1}{10} = 10nn_1 + 9n_1 + n + 1.$$

Per $n_1 = 0$ (cioè per $y = 9, 3, 7, 1$) oppure per $n_1 = -1$ (cioè

per $y = -1, -7, -3, -9$), si hanno in corrispondenza i minimi valori interi assoluti di x che indichiamo rispettivamente con s e d:

$$(2)\qquad \begin{aligned} s_{(1)} &= 9n+1 & d_{(1)} &= |-n| = n \\ s_{(3)} &= 3n+1 & d_{(3)} &= |-(7n+2)| = 7n+2 \\ s_{(7)} &= 7n+5 & d_{(7)} &= |-(3n+2)| = 3n+2 \\ s_{(9)} &= n+1 & d_{(9)} &= |-(9n+8)| = 9n+8. \end{aligned}$$

I valori di s e d sono complementari rispetto a p, cioè hanno per somma p, come del resto era da prevedersi, riferendosi alle proprietà delle congruenze.

Diremo *s nucleo positivo* e *d nucleo negativo* del numero p.

Diamo qualche esempio in applicazione delle formule (2):

p	s	d
431	388	43
623	187	436
547	383	164
869	87	782
3	1	2
7	5	2
9	1	8
11	10	1

6. Riferendoci ora alla relazione iniziale (A) nel sistema decimale $\left(\frac{N-a}{B}\right.$ è il numero delle diecine di N, x l's o il d di $\left.p\right)$, si può enunciare la seguente

REGOLA: Per provare se un numero N è divisibile per un numero p assegnato, entrambi primi con 10, si moltiplica la prima cifra del numero per il *nucleo s* (o *d*) e il prodotto si aggiunge (o si sottrae) al numero formato dalle rimanenti cifre, ottenendo così un numero N_1 che è divisibile per p soltanto se lo è N. Si ripete quindi l'operazione su N_1 e così via, finchè si perviene a un N precedente o a p o ad un evidente multiplo di esso o a zero o in fine a un numero chiaramente primo con p.

Solo in quest'ultimo caso N non è divisibile per p.

Osservazione 1ª. – In pratica se un N_k si riconosce divisibile per un numero m, primo con p, si può effettuare tale divisione e proseguire quindi l'operazione di accertamento su $N_k : m$, semplificando il procedimento.

Osservazione 2ª. – Ispezionando le (2) si rileva che è più age-

vole usare il *nucleo positivo* se p termina per 3 o per 9, e il *nucleo negativo* se termina per 1 o per 7.

Osservazione 3ª. - Operando per differenza si considera il valore assoluto del risultato.

Osservazione 4ª - Essendo 1 il nucleo positivo di 3 e di 9 e quello negativo di 11, dalla regola precedeute si ricavano le note regole di divisibilità, di origine indiana ed araba, per 3 per 9 e per 11.

Osservazione 5ª - In particolare, poichè ogni numero è divisibile per se stesso, ponendo nella (A) $N = p$, $B = 10$, e sostituendo ad x il valore dato dalla (1'), si ha:

$$\frac{p - a}{10} + \frac{py + 1}{10} a = N_1$$

cioè

$$p \frac{ay + 1}{10} = N_1$$

e poichè $\frac{ay + 1}{10}$ è un numero intero, risulta, come era evidente, che N_1 è multiplo di p,

***

Ecco qualche esempio di applicazione della regola precedente:

Esempio 1°. - Provare se 43639 è divisibile per 151.

I nuclei di 151 dati dalle formule (2) sono

$$s_{(1)} = 9n + 1 = 9 \times 15 + 1 = 136, \qquad d_{(1)} = n = 15.$$

Operiamo con entrambi i *nuclei* di 151 in questo primo esempio, senza tener conto dell'osservazione 2ª:

4 3 6 3 | 9 × 136	4 3 6 3 | 9 × 15
1 2 2 4 |	1 3 5 |
5 5 8 | 7 × 136	4 2 2 | 8 × 15
9 5 2 |	1 2 0 |
1 5 1 0	3 0 | 2 × 15
	3 0 |
	0

Oppure, tenendo conto dell'osservazione 1ª:

4 3 6 3 | 9 × 15
1 3 5 |
4 2 2 8 : 4
1 0 5 | 7 × 15
1 0 5 |
0

Nel primo caso si è ottenuto un multiplo di 151 e nel secondo zero; quindi 43639 è divisibile per 151.

Esempio 2°. - Provare se 40807 è divisibile per 13.

Il *nucleo positivo* (Oss. 2ª) di 13 è 4

$$\begin{array}{r|l} 4\,0\,8\,0 & 7\times 4 \\ \quad 2\,8 & \\ \hline 4\,1\,0 & 8\times 4 \\ \quad 3\,2 & \\ \hline 4\,4 & 2\times 4 \\ \quad 8 & \\ \hline 5 & 2\times 4 \\ 8 & \\ \hline 1\,3 & \end{array}$$

Oppure (Oss. 1ª)

$$\begin{array}{r|l} 4\,0\,8\,0 & 7\times 4 \\ \quad 2\,8 & \\ \hline 4\,1\,0\,8 : 4 & \\ \hline 1\,0\,2 & 7\times 4 \\ \quad 2\,8 & \\ \hline 1\,3\,0 & \end{array}$$

Risulta 40807 divisibile per 13.

Esempio 3°. - 2923 è divisibile per 37?

Nucleo di 37 (Oss. 2ª) è $d_{(7)} = 3n + 2 = 11$

$$\begin{array}{r|l} 2\,9\,2 & 3\times 11 \\ \quad 3\,3 & \\ \hline 2\,5 & 9\times 11 \\ 9\,9 & \\ \hline 7\,4 & \text{(Oss. 3ª).} \end{array}$$

La risposta è positiva.

Esempio 4°. - 4823 è divisibile per 59?

Il nucleo positivo di 59 è 6.

$$\begin{array}{r|l} 4\,8\,2 & 3\times 6 \\ \quad 1\,8 & \\ \hline 5\,0\,0 & \end{array}$$

500, cioè 5, cioè 1 (Oss. 1ª) è evidentemente primo con 59, quindi 4823 non è divisibile per 59.

***

7. Chiudo questa Nota, considerando una importante proprietà dei *nuclei*, sui quali si potrebbe basare tutta una teoria.

Dalla (1)

$$Bx - 1 = py$$

si ricava

$$Bx \equiv 1 \pmod{p}$$

cioè

$$Bs \equiv 1, \qquad B(-d) \equiv 1. \pmod{p} \tag{3}$$

Per cui si può affermare che il nucleo positivo e quello negativo nel suo valore relativo di un numero p sono coniugati della base del sistema di numerazione rispetto al numero stesso.

8. TEOREMA. - Condizione necessaria e sufficiente perchè un numero N sia divisibile per un numero p, entrambi primi con la base del sistema di numerazione, è che i nuclei positivi e negativi di N e di p siano rispettivamente congrui mod. p.

La condizione è necessaria.

Infatti, ponendo

$$N = kp \qquad (k = 1, 2, ...)$$

e indicando con s e d i nuclei di N e con s_1 e d_1 i nuclei di p, per la (3) si ha:

$$Bs \equiv 1 \qquad (\text{mod. } N = kp)$$

che ci autorizza a scrivere ($h = 1, 2, ...$):

$$hkp + 1 \equiv 1. \qquad (\text{mod. } N = kp)$$

E siccome

$$hkp \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

si ottiene

$$Bs \equiv 1. \qquad (\text{mod. } p)$$

Inoltre per le (3) si ha:

$$Bs_1 \equiv 1. \qquad (\text{mod. } p)$$

E dalle due ultime congruenze deriva

$$B(s - s_1) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

donde

$$s \equiv s_1. \qquad (\text{mod. } p)$$

Con procedimento analogo si dimostra che

$$d \equiv d_1. \qquad (\text{mod. } p)$$

La condizione è sufficiente.

Dalle due congruenze

$$s \equiv s_1 \qquad (\text{mod. } p)$$

$$d \equiv d_1 \qquad (\text{mod. } p)$$

si ha

$$(s + d) \equiv (s_1 + d_1) \qquad (\text{mod. } p)$$

cioè

$$N \equiv p \qquad (\text{mod. } p),$$

dalla quale si desume l'uguaglianza

$$N = kp.$$

9. COROLLARIO. - Un numero è primo se risultano impossibili i quattro sistemi di congruenze, simbolicamente espressi da:

$$\begin{matrix} s_{(N)} \equiv s_{(p_k)} \\ d_{(N)} = d_{(p_k)} \end{matrix} \quad (\text{mod. } p_k) \qquad (k = 1, 3, 7, 9).$$

Dove s e d sono i nuclei positivi e negativi dei numeri espressi dall'indice, cioè di N, numero da esaminare, e di $p_k = 10x + k$ ($k = 1, 3, 7, 9$), ed x è il numero delle diecine, il quale, se non risulta intero, dimostra l'impossibilità del sistema.