Bollettino
Unione Matematica Italiana

Francesco Saverio Rossi

Generalizzazione di un teorema sulla somma delle potenze K-me dei lati degli ennagoni regolari convessi e stellati inscritti in un cerchio per n primo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.1, p. 66–71.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_1_66_0>

Generalizzazione di un teorema sulla somma delle potenze K-me dei lati degli ennagoni regolari convessi e stellati incritti in un cerchio per n primo.

Nota di Francesco Saverio Rossi (a Lanciano).

Sunto. - *Prendendo lo spunto da una Nota del prof.* E. Ducci *vengono generalizzati alcuni risultati trovati dallo stesso Autore.*

In una Nota comparsa sul « Bollettino di Matematica » di Firenze (Fascicolo I dell'anno 1935), il Prof. Enrico Ducci ha esposto alcuni risultati riguardanti la somma delle potenze dello stesso

([25]) Ovviamente una proposizione analoga a quella della nota ([23]) vale anche per gli angoloidi.

([26]) Cfr. per és. Rouché e De Comberousse, *Traité de Géom.*, (1922), 2ª parte, p. 517, esercizio n. 606; p. 524 es. 668. Oppure per i teor. sulla simil. dei tetraedri Sannia e D'Ovidio. l. c., libro VII, cap. 1°, pp. 429-31.

grado k dei lati degli ennagoni convessi e stellati inscritti nello stesso cerchio per n primo e k intero positivo qualsiasi; risultati che possono considerarsi validi solo per alcuni valori di k.

Egli dimostra che per k dispari e n primo la somma anzidetta è uguale al prodotto di $(-1)^{(k-1):2}$ per il polinomio

$$\binom{k}{0}\cot\frac{k\pi}{2n}-\binom{k}{1}\cot(k-2)\frac{\pi}{2n}+\binom{k}{2}\cot(k-4)\frac{\pi}{2n}-\ldots\pm\binom{k}{\frac{k-1}{2}}\cot\frac{\pi}{2n};$$

e, per k pari e n primo, dal multiplo di n

$$\frac{1}{2}\binom{k}{\frac{1}{2}k}\cdot n.$$

La Nota termina con l'osservazione: « Quando k è dispari il primo risultato vale anche per $k=3$, ma allorchè k è pari ed $n=3$, il secondo risultato sussiste soltanto se $k=2$ e $k=4$ ».

Ho cercato di rendermi conto del perchè della giusta osservazione ed ho trovato risultati più generali, che espongo, limitandomi naturalmente a riportare le formole per n primo. [1]

2. Detta Snk la somma

$$\text{sen}^k\frac{\pi}{n}+\text{sen}^k\frac{2\pi}{n}+\ldots+\text{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}$$

e $ln1$, $ln2, \ldots, ln\gamma$ i lati degli ennagoni convessi e stellati inscritti nel circolo di raggio unitario, in ordine crescente, $\left(\gamma=\frac{n-1}{2}\right)$ chiamiamo $S'nk$ la somma

$$l_{n1}^k+l_{n2}^k+\ldots+l_{n\gamma}^k$$

che si deduce ovviamente da Snk moltiplicandone tutti i termini per 2^k e tenendo conto del fatto che i termini lni vengono così ripetuti due volte ciascuno.

Ciò posto, si consideri, per k dispari, la nota identità gonio-

[1] *Per altre proprietà riguardanti i lati dei poligoni convessi e stellati,* cfr. il « Bollettino U. M. I. », 1934. Bologna, fasc. I e III; sul « Giornale » di BATTAGLINI. Napoli 1934, il vol. 52° e 25° della III serie, le Note dello stesso Autore; e poi G. PALAMA in « Boll. U. M. I. », n. 4, ottobre 1934; U. G. CAVALLARO: « Boll. di Matem. di Firenze », fasc. 2, 1928.

metrica

$$(1)\qquad 2^{k-1}(-1)^{(k-1):2}S_{nk}=\binom{k}{0}\sum_{1=r}^{n-1}\operatorname{sen}^k\frac{r\pi}{n}-$$

$$-\binom{k}{1}\sum_{1=r}^{n-1}\operatorname{sen}(k-2)\frac{r\pi}{n}+\ldots+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{\frac{k-1}{2}}\sum_{1=r}^{n-1}\operatorname{sen}\frac{r\pi}{n}$$

e, per k pari, l'altra

$$(2)\qquad 2^{k-1}(-1)^{k:2}S_{nk}=\binom{k}{0}\sum_{1=r}^{n-1}\cos k\frac{r\pi}{n}-\binom{k}{1}\sum_{1}^{n-1}\cos(k-2)\frac{r\pi}{n}+\ldots+$$

$$+(-1)^{\frac{k}{2}-1}\binom{k}{\frac{1}{2}k-1}\sum_{1}^{n-1}\cos\frac{2r\pi}{n}+(-1)^{\frac{k}{2}}\binom{k}{\frac{1}{2}k}\cdot\frac{n-1}{2}\ [2].$$

Per il calcolo effettivo delle Σ faremo ricorso alle relazioni trigonometriche

$$(3)\qquad \sum_{1=r}^{n-1}\operatorname{sen} r\alpha=\frac{\operatorname{sen}\frac{n-1}{2}\alpha\operatorname{sen}\frac{n}{2}\alpha}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

$$(4)\qquad \sum_{1=r}^{n-1}\cos r\alpha=\frac{\operatorname{sen}\frac{n-1}{2}\alpha\cos\frac{n\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\ [3]$$

ponendo in esse consecutivamente

$$\alpha=\frac{k\pi}{n},\qquad (k-2)\frac{\pi}{n},\ldots.$$

Occorre però precisare che per $k=2n$ (o un multiplo di $2n$) la formula (4) cade in difetto, onde la necessità di distinguere i casi $k<2n$, $k\geqq 2n$.

3. Sia k dispari qualunque.

Se nella (1) sostituiamo i risultati forniti dalla (3) col porre in essa $\alpha=\frac{k\pi}{n}$, $(k-2)\frac{\pi}{n},\ldots$, perverremo alla relazione

$$(5)\qquad (-1)^{\frac{k-1}{2}}S_{nk}=\sum_{m=0}^{(k-1):2}(-1)^m\binom{k}{m}\cot(k-2m)\frac{\pi}{2n}=S'_{nk}(-1)^{\frac{k-1}{2}}$$

che coincide con quella trovata da E. Ducci per k dispari.

[2] Per la (1) e (2) vedere Francesco Severi, *Lezioni di Analisi*, vol. I, Zanichelli, Bologna, 1938, pag. 117.

[3] Per (3) (4) vedere G. Pesci, *Trattato elementare di trigonometria piana e sferica*. Ed. R. Giusti, Livorno, 5ª ediz., 1421, p. 31 degli Esercizi.

4. Sia k pari $=2pn+2s$ ($p=0, 1, \ldots;\ 0<s<n$).
La formula che dà S_{nk} diviene:

$$(2)' 2^{k-1}(-1)^{k:2} S_{nk} = \binom{2pn+2s}{0} \sum_1^{n-1} \cos(2pn+2s)\frac{\pi r}{n} -$$
$$-\binom{2pn+2s}{1}\sum_1^{n-1}\cos(2pn+2s-2)\frac{\pi r}{n}+\ldots+$$
$$+(-1)^s\binom{2pn+2s}{s}\sum_1^{n-1}\cos(2pn)\frac{\pi r}{n}+\ldots+$$
$$+(-1)^{n+s}\binom{2pn+2s}{s+n}\sum_1^{n-1}\cos(2(p-1))n\frac{\pi r}{n}+\ldots=$$
$$=\left[\binom{k}{0}-\binom{k}{1}+\ldots+(-1)^{\frac{k}{2}-1}\binom{k}{\frac{1}{2}k-1}\right]+(-1)^{\frac{k}{2}}\frac{n-1}{2}\binom{k}{\frac{1}{2}k}+$$
$$+(-1)^s n\left[\binom{k}{s}+(-1)^n\binom{k}{s+n}+\ldots+(-1)^{(p-1)n}\binom{k}{s+(p-1)n}\right] \text{ [4]}.$$

Tale ultima uguaglianza, cambiata di segno, e divisa per $(-1)^{(k:2)+1}$ può in definitiva scriversi

$$(2)'' 2^{k-1} S_{nk} = \frac{n}{2}\binom{2pn+2s}{pn+s} - (-1)^{pn+1}\cdot n\cdot$$
$$\cdot\left[\binom{2pn+2s}{s}+(-1)^n\binom{2pn+2s}{n+s}+\ldots+(-1)^{(p-1)n}\binom{2pn+2s}{s+(p-1)n}\right].$$

Allora la somma S'_{nk} delle potenze K.me (k pari) dei lati degli ennagoni (n primo) diviene uguale a:

$$(6)\qquad \sum_{1=r}^{(n-1)/2} l^k_{nr} = \frac{n}{2}\binom{2pn+2s}{pn+s} - (-1)^{pn+1}\cdot n\cdot$$
$$\cdot\left[\binom{2pn+2s}{s}+(-1)^n\binom{2pn+2s}{n+s}+\ldots+(-1)^{(p-1)n}\binom{2pn+2s}{s+(p-1)n}\right].$$

Per $p=0$, la (6) coincide con il risultato trovato da E. Ducci.

5. Le formule analoghe alla (5) e (6) per n composto e k qualunque si possono dedurre facilmente da esse, aggregando, per n

[4] Essendo $(u-v)^k=\sum_0^k(-1)^m u^m v^{k-m}$ e, per $u=v=1$, $0=\binom{k}{0}-\binom{k}{1}+$ $+\ldots+(-1)^k\binom{k}{k}$, si ottiene di conseguenza:

$$2\left[\binom{k}{0}-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\ldots\pm\binom{k}{k/2-1}\right]\mp\binom{k}{1/2k}=0.$$

pari ad esempio, il termine $(-1)^{(h-1)\cdot 2}2^{k-1}$ e alla (6) semplicemente 2^{k-1}.

6. Le relazioni che precedono offrono gli enunciati di alcuni teoremi sull'equivalenza. Così abbiamo:

1) « La somma dei quadrati dei lati degli ennagoni regolari convessi e stellati iscritti in un cerchio di raggio R equivale ad n volte il quadrato del raggio per n dispari, a $(n+2)$ volte se il numero n è pari ».

2) « La somma dei cubi dei lati degli ennagoni regolari convessi e stellati iscritti in un cerchio di raggio R equivale a $\left[3\cot\frac{\pi}{2n} - \cot\frac{3\pi}{2n}\right]$ volte il cubo del raggio, per n dispari, allo stesso numero $+4$ volte il cubo del raggio, per n pari », ecc.

7. Caso particolare.

Mi piace riportare una dimostrazione del Teorema 1) di cui al n. 6 fondata su semplici teoremi di trigonometria.

È noto che il raggio di un cerchio circoscritto ad un triangolo è uguale a $R = \frac{abc}{4S}$; per cui, detti $l_{n1}, l_{n2}, \ldots, l_{n,n-1}$ le diagonali successive partenti da uno stesso vertice del poligono regolare di n lati, avrò che l'area A del poligono è data dalla relazione $(R=1)$

$$4A = l_{n1}l_{n1}l_{n2} + l_{n1}l_{n2}l_{n3} + \ldots + l_{n1}l_{n\,n-2}l_{n\,n-1}$$

e perciò

$$2n\cos\frac{\pi}{n} = \sum_{1=h}^{n-2} l_{n,h}l_{n,h+1} \quad (7)$$ [5].

Ora, dopo di aver osservato che l'angolo di due diagonali consecutive è uguale a $\frac{\pi}{n}$, scriviamo le $(n-2)$ relazioni di Carnot relative ai lati dei triangoli costituiti tirando appunto le suddette diagonali:

$$l^2_{n1} = l^2_{n1} + l^2_{n2} - 2l_{n1}l_{n2}\cos\frac{\pi}{n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l^2_{n1} = l^2_{n,n-2} + l^2_{n,n-1} - 2l_{n\,n-2}l_{n\,n-1}\cos\frac{\pi}{n}.$$

[5] Di quà segue la relazione goniometrica:

$$n\cos\frac{\pi}{n} = \sum_{h-1}^{n-2} \operatorname{sen} n\frac{\pi}{n} \operatorname{sen}(h+1)\frac{\pi}{n}.$$

Sommando ed aggiungendo ad ambo i membri $2l^2_{n,1}$, si ottiene:

$$nl^2_{n,1} = 2\sum_{1}^{n-1}{}_k l^2_{n,k} - 2\cos\frac{\pi}{n}\sum_{1}^{n-2} l_{n,h} l_{n,h+1}$$

onde:

$$2\sum_{1}^{n-1}{}_k l^2_{n,k} = nl^2_{n,1} + 2\cos\frac{\pi}{n}\sum_{1}^{n-2} l_{n,h} l_{n,h+1}$$

che per la (7) diventa uguale ancora a

$$nl^2_{n,1} + 2\cos\frac{\pi}{n} + 2n\cos\frac{\pi}{n} - 2\cos\frac{\pi}{n} = n\cdot 4\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{n} + 4n\cos^2\frac{\Sigma}{n} = 4n.$$

Quindi:

$$\Sigma\, l^2_{n,k} = 2n. \tag{8}$$

Ora, *se n è pari*, dette λni le lunghezze dei lati degli ennagoni iscritti, i λni sono in numero di $\frac{n}{2}$, essendo $\lambda_{n,\frac{n}{2}}$ maggiore degli altri. Aggiungendo perciò $\lambda^2_{n,\frac{n}{2}} = 4$ ad ambo i membri della (8) si ha:

$$2\sum_{1}^{n:2}{}_i \lambda^2_{ni} = 2n + 4 = 2(n+2)$$

cioè

$$\sum_{1}^{n/2}{}_i \lambda^2_{ni} = n + 2$$

che è la seconda parte del teorema.

Se n è dispari, sono a due a due uguali i λ_{ni}, onde: $\sum_{1=i}^{(n-1)/2} \lambda^2_{n,i} = n$, che è l'altra parte del teorema.