
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MAURO PICONE

Esistenza e calcolo della soluzione di un certo problema al contorno per il sistema di equazioni dell'elasticità bidimensionale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 3
(1948), n.1, p. 4–6.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_1_4_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_1_4_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Esistenza e calcolo della soluzione di un certo problema
al contorno per il sistema di equazioni
dell'elasticità bidimensionale (*).**

Nota di MAURO PICONE (a Roma).

Sunto. - Si dimostra che ad una deformazione elastica di una regione piana, isotropa e omogenea, occupante, nel suo stato naturale, un dominio semplicemente connesso, sollecitata da note forze, si possono arbitrariamente assegnare, sulla frontiera di quel dominio, la rotazione e lo sforzo tangenziale.

Nella seduta dell'8 nov. scorso della Classe di Scienze fisiche e matematiche dell'Accademia Nazionale dei Lincei, ho presentato una Nota nella quale espongo un metodo d'integrazione del sistema di equazioni lineari a derivate parziali competenti all'elasticità tridimensionale e vorrei ora nella presente osservare i risultati ai quali il metodo stesso conduce quando lo si applichi al sistema dell'elasticità *bidimensionale*. Supporrò anche qui analitiche le funzioni e le curve che prenderò in considerazione. Indicherò con D il dominio, limitato e regolare, del piano (x, y) , occupato dalla regione piana elastica (isotropa e omogenea) nel suo stato naturale, con FD la frontiera di D , con h e k le costanti di LAMÈ e per le componenti X_n e Y_n della pressione esercitata sull'elemento lineare della regione, nel punto (x, y) e di asse normale n , porrò

$$X_n = \alpha \cos(x, n) + \lambda \cos(y, n), \quad Y_n = \lambda \cos(x, n) + \beta \cos(y, n),$$

talchè con α e β designerò gli sforzi normali e con λ quello tangenziale, nel punto (x, y) . Indicherò poi con X e Y le componenti della forza esterna applicata nel punto (x, y) , riferita all'unità di area, con u e v quelle dello spostamento, con p la rotazione e, per una funzione $f(x, y)$, con le concise notazioni $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, \dots$, le sue derivate parziali. Il sistema di equazioni dell'equilibrio elastico, che deve essere soddisfatto nell'interno di D , si scrive allora

$$(1') \quad X + \alpha_x + \lambda_y = 0, \quad Y + \lambda_x + \beta_y = 0,$$

$$(1'') \quad \alpha = (2h + k)u_x + kv_y, \quad \beta = ku_x + (2h + k)v_y, \quad \lambda = h(v_x + u_y).$$

Si ha

$$(2) \quad 2p = v_x - u_y,$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

e quindi, dalle (1''),

$$(3) \quad \begin{cases} du = \frac{(2h+k)\alpha - k\beta}{4h(h+k)} dx + \left(\frac{\lambda}{2h} - p\right) dy, \\ dv = \left(\frac{\lambda}{2h} + p\right) dx - \frac{(2h+k)\beta - k\alpha}{4h(h+k)} dy. \end{cases}$$

Le condizioni d'integrabilità delle forme differenziali ai secondi membri delle (3), forniscono, ove si tenga conto delle (1'), le equazioni

$$\alpha_y = \lambda_x - \frac{4h(h+k)}{2h+k} p_x - \frac{kY}{2h+k}, \quad \beta_x = \lambda_y + \frac{4h(h+k)}{2h+k} p_y - \frac{kX}{2h+k}.$$

e pertanto risulta

$$(4) \quad \begin{cases} d\alpha = -(X + \lambda_y)dx + \left(\lambda_x - \frac{4h(h+k)}{2h+k} p_x - \frac{kY}{2h+k}\right) dy, \\ d\beta = \left(\lambda_y + \frac{4h(h+k)}{2h+k} p_y - \frac{kX}{2h+k}\right) dx - (Y + \lambda_x) dy, \end{cases}$$

e le condizioni d'integrabilità delle forme differenziali ai secondi membri di queste forniscono le seguenti

$$(5) \quad \begin{cases} \Delta p = \frac{1}{2h}(X_y - Y_x), \\ \Delta \lambda = \frac{k}{2h+k} Y_x - X_y + \frac{4h(h+k)}{2h+k} p_{xx}, \end{cases}$$

e, nel caso che le forze esterne derivino dal potenziale $F(x, y)$,

$$(5') \quad \begin{cases} \Delta p = 0, \\ \Delta \lambda = -\frac{2h}{2h+k} F_{xy} + \frac{4h(h+k)}{2h+k} p_{xx}, \end{cases}$$

ove $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Si hanno dunque i teoremi:

I. *Ad una deformazione elastica della regione, occupante nel suo stato naturale il dominio D, supposto semplicemente connesso, sollecitata da note forze esterne, si possono arbitrariamente assegnare:*

a) su FD la rotazione p e lo sforzo tangenziale λ , b) in due punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1) di $D - FD$ lo spostamento e gli sforzi normali, oppure se $(x_1 - y_0)(y_1 - y_0) \neq 0$, gli spostamenti in entrambi. In seguito a ciò la deformazione risulta determinata e si calcola mediante la risoluzione di due problemi di Dirichlet nel piano.

II. *Qualunque sia la connessione di D, se le forze esterne derivano da una funzione potenziale, definita in un dominio rettangolare contenente la regione e scomponibile nella somma di due funzioni $L(x)$ e $M(y)$, dipendenti, rispettivamente dalla sola x e dalla sola y , assegnati, arbitrariamente, su FD, alla rotazione e allo sforzo*

tangenziale, valori costanti p e λ , tali costanti essi riescono in tutto D , e, detti (x_0, y_0) un punto di $D - FD$ e a e b due costanti, risulta

$$\alpha = a - L(x) - \frac{k}{2h+k} M(y) \quad \beta = b - \frac{k}{2h+k} L(x) - M(y),$$

$$u = \frac{(2h+k)a - kb}{4h(h+k)} (x - x_0) + \left(\frac{\lambda}{2h} - p \right) (y - y_0) - \frac{1}{2h+k} \int_{x_0}^x L(\xi) d\xi,$$

$$v = \left(\frac{\lambda}{2h} + p \right) (x - x_0) + \frac{(2h+k)b - ka}{4h(h+k)} (y - y_0) - \frac{1}{2h+k} \int_{x_0}^x M(\eta) d\eta.$$

III. Qualunque sia la connessione del dominio D , se le componenti X e Y della forza esterna sono date da polinomi in x e y , comunque si assumano due polinomi p e λ , verificanti le (5), le (4) e (3) forniscono polinomi esprimenti gli sforzi normali e gli spostamenti in una deformazione, per la quale p e λ sono, rispettivamente, la rotazione e lo sforzo tangenziale.