Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giuseppe Tanturri

Su alcuni inviluppi di rette

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.1, p. 46–48.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_1_46_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Su alcuni inviluppi di rette.

Nota di GIUSEPPE TANTURRI (a Torino).

Sunto. - *Per gli inviluppi delle rette che segano una* C^4 *piana secondo quaterne proiettive si dimostra che i soli casi di riducibilità corrispondono a* C^4 *con punto triplo e alla* C^4 *tricuspidata.*

È noto che, data una quartica piana generale, le rette che la secano secondo quaterne di punti fra loro proiettive costituiscono un inviluppo di classe 12, cioè di classe eguale a quella della quartica (v. per es. CLEBSCH, *Vorlesungen uber Geometrie b. von Lindemann,* Leipzig, Teubner 1891, I-ter. Band, pag. 279).

Questo non vale in generale per quartiche dotate di punti multipli infatti, secata la curva con una retta, si deve imporre che la quaterna di punti secati abbia, al variare della retta, un invariante assoluto costante, e se C^4 è generale imponendo a tale invariante un valore tale da portare alla coincidenza di due delle quattro intersezioni, si ottiene l'inviluppo delle tangenti della quartica, la cui classe è dunque eguale a quella degli inviluppi corrispondenti ad altri valori dell'invariante; mentre se C^4 ha p. es. un punto doppio in A, l'imporre la coincidenza di due intersezioni porta l'inviluppo a ridursi, contenendo come parte il fascio di centro A contato almeno due volte.

Si presentano però dei casi nei quali anche l'inviluppo corrispondente a un valore generico dell'invariante è riducibile: scopo di questa Nota è l'esame completo di tali casi. Precisamente si vuol provare che a tale requisito soddisfano solo alcune quartiche razionali che qui si elencano:

a) le quartiche con punto triplo;

b) la quartica tricuspidata di terza classe.

Si farà la sola ipotesi che si tratti di curve irriducibili.

Rappresentata la C^4 con l'equazione omogenea $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ e data una retta di equazione $u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0$, eliminandone per es. x_0 si ottiene una forma binaria quartica eguagliata a zero con coefficienti funzioni delle u_i la quale rappresenta la proiezione, dal punto fondamentale A_0 sulla retta $x_0 = 0$, della quaterna secata. Scrivendo che l'invariante assoluto è costante si ricava l'equazione $i^3 - kj^2 = 0$ che rappresenta, al variare di k, una schiera di inviluppi, della quale fanno parte $i = 0$ e $j = 0$. Poichè ogni inviluppo è per ipotesi riducibile, la schiera dovrà a priori soddisfare a uno di questi requisiti (per un noto teorema del BERTINI sui sistemi lineari):

a) possedere una parte fissa

b) comporsi di gruppi di una involuzione

(potrebbero ancora verificarsi insieme i due casi, ma qui non interessa).

CASO *a*). La schiera possegga una componente fissa. Questa dev'essere perciò comune a $i = 0$ e a $j = 0$; d'altra parte la condizione $i = j = 0$ caratterizza le quaterne con punto triplo: dunque la componente fissa è l'inviluppo delle rette che incontrano C^4 in tre punti coincidenti, ossia è il fascio di rette per un punto triplo di C^4. Viceversa, data una quartica con punto triplo in A, le rette per A conducono per sezione a quaterne con punto triplo, e per esse è $i = j = 0$; dunque il fascio di centro A è parte dell'inviluppo generico $i^3 - kj^2 = 0$ che è riducibile con componente fissa.

Il primo caso si presenta nelle sole C^4 *con punto triplo.* – Per es. per la curva autoduale $x_1^4 - 4x_0x_2^3 = 0$ si trova come parte fissa $u_0 = 0$ e come componente variabile $4^3u_0u_2^3 - ku_1^4 = 0$; per la curva di sesta classe $x_1^4 + x_2^4 + 12x_0x_1^2x_2 = 0$ si ha la stessa componente fissa, e inoltre

$$(u_0^2 + 12u_2^2)^3 - k(2u_0^2u_2 + 9u_0u_1^2 - 8u_2^3)^2 = 0.$$

CASO *b*). La schiera si componga di gruppi di una involuzione. Siccome la $i^3 - kj^2 = 0$ è di grado 12 nelle u_i, le componenti hanno classe eguale a un divisore di 12; d'altra parte per $k = 27$ si deve trovare l'inviluppo della C^4 eventualmente associato ad altri degeneri, dunque la classe delle componenti non dev'essere inferiore a tre. Restano possibili i valori 3, 4, 6.

Si osservi intanto che con tali valori della classe, la curva ha certo punti multipli; dunque tra gli inviluppi della schiera si debbono trovare i fasci che hanno quei punti come centri. Ammesso ora che la $i^3 - kj^2 = 0$ rappresenti sempre due inviluppi di sesta classe, darà ciascuno come combinazione lineare di una forma di sesto grado nelle u_i e di una forma riducibile che rappresenti quei fasci (eventualmente associati ad altro). D'altra parte anche $i = 0$ e $j = 0$, rispettivamente di quarto e sesto grado nelle u_i, fanno parte della schiera, e debbono comporsi di quelle forme: si vede allora che deve porsi $i = U_1 W_3$, $j = U_1^3 W_3 + \lambda V_6$ ove U, V, W rappresentano forme nelle u_i di grado uguale al rispettivo indice. Si ha

$$i^3 - kj^2 = U_1^3 W_3^3 - k(U_1^3 W_3 + \lambda V_6)^2 = 0.$$

Ma per $k = 27$ si deve trovare come soluzione, fra l'altro, l'inviluppo degenere U, dunque $\lambda = 0$ e la curva rientra in casi già visti. Altri casi a priori possibili si trattano nello stesso modo. Analogamente se la solita equazione desse sempre un gruppo di forme del 4° ordine in involuzione, gli stessi ragionamenti porterebbero a scrivere $i = U_3^2 + \mu f_4$, $j = U_2(U_2^2 + \lambda f_4)$, e quindi

$$i^3 - kj^2 = (1 - k)U_2^6 + (3\mu - 2k\lambda)U_2^4 f_4 + (3\mu^2 - k\lambda^2)U_2^2 f_4^2 + \mu^3 f_4^3 = 0$$

dunque, dovendosi trovare per $k = 27$ la soluzione U_2, dev'essere $\mu = 0$ e $i = U_2^2$; allora i e j hanno una componente comune e la curva ha punto triplo.

Rimane il caso che le componenti siano di terza classe; e tale è anche la classe di C^4, che è *la quartica tricuspide. Il calcolo conferma che qui si ha proprio riducibilità.* Precisamente, posta l'equazione della curva sotto la forma

$$x_0^2(x_1 - x_2)^2 + x_1^2(x_2 - x_0)^2 + x_2^2(x_0 - x_1)^2 - 2x_0x_1x_2(x_0 + x_1 + x_2) = 0$$

si ottengono terne di inviluppi del tipo

$$(u_0 + u_1 + u_2)^3 + 3\lambda_i u_0 u_1 u_2 = 0.$$

È da notare che questi inviluppi non sono proiettivamente identici alla curva da cui siamo partiti, la quale, avendo equazione inviluppo

$$(u_0 + u_1 + u_2)^3 - 27 u_0 u_1 u_2 = 0$$

è l'unica della schiera dotata di tangente doppia; tutti hanno però a comune con essa le stesse cuspidi, e le stesse tangenti cuspidali.

Traducendo per dualità, dalla quartica si ottiene la *cubica nodata,* e se si impone che la quaterna di tangenti ad essa condotte per un punto rimanga proiettivamente identica, il punto descrive una cubica generale che ha in comune con la cubica nodata tre flessi con le stesse tangenti inflessionali. In più l'invariante assoluto della quaterna si prova essere eguale al modulo della cubica generale: in altri termini *i due gruppi di tangenti condotte per il punto alla cubica generale e alla cubica con nodo sono proiettive.*
il punto alla cubica generale e alla cubica con nodo sono proiettive.

Infine si può dimostrare che, se dal punto doppio si proiettano i punti di contatto delle tangenti condotte alla C^3 con nodo per un punto che varia su una determinata cubica del fascio (che ha i nove punti base riuniti nei tre flessi della C^3 nodata) si ottiene un'altra quaterna di rette che rimane proiettivamente identica; però le due quaterne non sono in generale proiettive.