Guido Vaona

Elementi differenziali d'iperosculazione di due trasformazioni puntuali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.1, p. 40–46.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_1_40_0>

Elementi differenziali d' iperosculazione di due trasformazioni puntuali.

Nota di GUIDO VAONA (a Bologna) (*).

Sunto. - *Si estende un recente teorema del* VILLA *sulle direzioni d'osculazione e d'iperosculazione di due trasformazioni puntuali.*

1. M. VILLA ha recentemente dimostrato che [1]: date fra due spazi lineari S_r, $S_r'(r > 1)$ due trasformazioni puntuali T_1, T_2

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

[1] Si veda: M. VILLA, *Direzioni d' osculazione e d' iperosculazione di due trasformazioni puntuali*, « Questo Bollettino », ser. III, vol. II, p. 188, 1947. Per la bibliografia riguardante le recenti ricerche proiettivo-differenziali sulle trasformazioni puntuali fra due S_r rimandiamo all'importante lavoro del VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*. Note I, II, III, IV, « Rend. dell'Accad. dei Lincei », ser. VIII, vol. IV, 1948.

aventi in una coppia regolare (O, O') lo stesso intorno d'ordine $s > 0$, esistono, in generale, $\frac{(s+1)^r - 1}{s}$ E_1 di centro O (opp. O') tali che ogni E_{s+1} contenente uno di essi è mutato sia da T_1 che da T_2 nello stesso E_{s+1}.

Di questo teorema del VILLA, ricco di notevoli applicazioni, si dà in questa Nota un'estensione e precisamente si dimostra, valendosi dello stesso teorema del VILLA, che (n. 2): *date due trasformazioni puntuali* T_1, T_2 *nelle condizioni suddette, esistono, in generale,* $\frac{(\mathrm{s}+1)^{\mathrm{r}} - 1}{\mathrm{s}}$ $\mathrm{E_k}$ *di centro* O (*opp.* O') *tali che ogni* $\mathrm{E_{s+k}}$ *contenente uno di essi è mutato sia da* T_1 *che da* T_2 *nello stesso* $\mathrm{E_{s+k}}$.

Nel n. 3 si accenna ad alcune applicazioni. In altro lavoro, rivolto a proprietà *in grande*, applicando il precedente risultato, si ottiene una nuova caratterizzazione delle trasformazioni cremoniane quadratiche che si collega a quella ottenuta recentemente, per suggerimento del VILLA, da G. CASADIO ([2]).

2. Dimostriamo il teorema:

Date fra due spazi $\mathrm{S_r}$, $\mathrm{S_r}'$ *due trasformazioni puntuali* T_1, T_2 *che si approssimano fino all'intorno di ordine* s(> 0) *di una coppia di punti corrispondenti* (O, O'), *regolare per entrambe, esistono, in generale,* $\frac{(\mathrm{s}+1)^{\mathrm{r}} - 1}{\mathrm{s}}$ $\mathrm{E_k}$ *di centro* O (*opp.* O') *tali che ogni* $\mathrm{E_{s+k}}$ *contenente uno di quegli* $\mathrm{E_k}$ *è mutato in uno stesso* $\mathrm{E_{s+k}}$ *sia da* T_1 *che da* T_2.

Consideriamo due trasformazioni puntuali T_1, T_2 che mutano i punti di uno spazio lineare $S_r(x_1, \ldots, x_r)$ ad r dimensioni nei punti di un altro spazio lineare $S_r'(y_1, \ldots, y_r)$ pure ad r dimensioni e riferiamoci ad una coppia (O, O') di punti corrispondenti. Supponiamo che T_1, T_2 si approssimino fino all'intorno di ordine $s(> 0)$ di (O, O'). È noto che T_1 e T_2 subordinano fra le direzioni uscenti da O e quelle uscenti da O' una stessa proiettività Ω. Riferiamo i due spazi a due sistemi di coordinate proiettive non omogenee in cui (O, O') sono le origini ed in cui gli assi $y_1, y_2, \ldots, y_r$ e la retta $y_1 = y_2 = \ldots = y_r$ di S_r' sono rispettivamente le rette corrispondenti in Ω degli assi $x_1, x_2, \ldots, x_r$ e della retta $x_1 = x_2 = \ldots = x_r$ di S_r.

Nell'intorno di (O, O') le equazioni di T_1 sono del tipo

$$y_i = ax_i + f_{2,i} + \ldots + f_{s,i} + f_{s+1,i} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{1}$$

([2]) Si veda: G. CASADIO, *Sulle trasformazioni puntuali che hanno direzioni inflessionali passanti per punti fissi*, « Rend. dell'Accad. dei Lincei », ser. VIII, vol. II, p. 555, 1947.

e quelle di T_2

(2) $$y_i = ax_i + f_{2,i} + \dots + f_{s,i} + \varphi_{s+1,i} + \dots \qquad (i = 1, 2, \dots, r),$$

dove a è una costante ($\neq 0$) e le f e φ sono forme in $x_1, x_2, \dots, x_r$ di grado uguale al primo indice.

Per il teorema del VILLA esistono $\frac{(s+1)^r - 1}{s} E_1$ d'iperosculazione.

Dimostriamo dapprima che per ogni E_1 d'iperosculazione esiste uno ed un solo E_2 d'iperosculazione, che lo contiene, cioè tale che ogni E_{s+2} per esso viene mutato nello stesso E_{s+2} da T_1 e da T_2. Consideriamo in S_r' l'$\overline{E}_1$

(3) $$y_t = m_t y_1 \qquad (t = 2, 3, \dots, r),$$

e supponiamo che esso sia d'iperosculazione, cioè tale che un E_{s+1} che lo contenga venga mutato nello stesso E_{s+1} sia da T_1 che da T_2. Un $\overline{E}_{s+2}$, contenente l'$\bar{E}_1$ (3), ha equazioni della forma

(4) $$y_t = m_t y_1 + \sum_2^{s+2}{}_i \, \bar{p}_{i,t} \, y_1^i \qquad (t = 2, 3, \dots, r).$$

Gli E_{s+2} che gli corrispondono in T_1 e T_2 hanno rispettivamente le equazioni

(5) $$x_t = m_t x_1 + \sum_2^{s+1}{}_i \, p_{i,t} x_1^i + p_{s+2,t} x_1^{s+2} \qquad (t = 2, 3, \dots, r)$$

(6) $$x_t = m_t x_1 + \sum_2^{s+1}{}_i \, p_{i,t} x_1^i + q_{s+2,t} x_1^{s+2} \qquad (t = 2, 3, \dots, r).$$

Affinchè essi coincidano, possedendo gli stessi E_{s+1}, occorre e basta che

(7) $$p_{s+2,t} = q_{s+2,t} \qquad (t = 2, 3, \dots, r).$$

Per calcolare il coefficiente $p_{s+2,t}$ occorre sostituire le (1) nelle (4) e nelle relazioni ottenute le (5); imporre infine che coincidano i coefficienti di x_1^{s+2} che si hanno al I e II membro dell'espressione ottenuta. Nel fare questo calcolo indico con Φ e Ψ i gruppi dei termini nei quali non appaiono i coefficienti di $f_{s+1,t}$ e $f_{s+2,t}$ ed il coefficiente $p_{s+2,t}$. Si trova

$$ap_{s+2,t} + \sum_2^r{}_i \, p_{2,i} \frac{\partial}{\partial x_i} f_{s+1,t} + f_{s+2,t} + \Phi = m_t f_{s+2,1} + m_t \sum_2^r{}_i \, p_{2,i} \frac{\partial}{\partial x_i} f_{s+1,1} + \\ + 2a\bar{p}_{2,t} f_{s+1,1} + \Psi.$$

Analogamente si ha per $q_{s+2,t}$

$$aq_{s+2,t} + \sum_2^r{}_i \, p_{2,i} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_{s+1,t} + \varphi_{s+2,t} + \Phi = m_t \varphi_{s+2,1} + m_t \sum_2^r{}_i \, p_{2,i} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_{s+1,1} + \\ 2a\bar{p}_{2,t} \varphi_{s+1,1} + \Psi,$$

dove le f e φ e le loro derivate parziali vanno calcolate per i valori $1, m_2, \dots, m_r$ di $x_1, x_2, \dots, x_r$ (3). Le (7) diventano quindi

$$(8) \qquad \sum_2^r{}_i\, p_{2,i} \frac{\partial}{\partial x_i}[m_t(f_{s+1,1} - \varphi_{s+1,1}) - (f_{s+1,t} - \varphi_{s+1,t})] +$$
$$+ 2a\bar{p}_{2,t}(f_{s+1,1} - \varphi_{s+1,1}) = f_{s+2,t} - \varphi_{s+2,t} - m_t(f_{s+2,1} - \varphi_{s+2,1})$$
$$(t = 2, 3, \dots, r),$$

dove le $p_{2,i}$, ricavate al solito modo, sono date da

$$(9) \qquad ap_{2,i} = m_i f_{2,1} - f_{2,i} + a^2\bar{p}_{2,i}.$$

Le (8), tenuto conto della (9), costituiscono un sistema di $r-1$ equazioni lineari nelle $r-1$ incognite $\bar{p}_{2,i}$ a determinante, in generale, $\neq 0$. La soluzione di tale sistema ci fornisce i coefficienti $\bar{p}_{2,i}$ relativi all' $\bar{E}_2$ richiesto.

Dimostriamo analogamente che, ammessa l'esistenza di un $E_{k-1}(k > 2)$ d'iperosculazione, esiste, in generale, uno ed un solo E_k d'iperosculazione che lo contiene tale cioè che ogni E_{s+k} per esso è mutato da T_1 e T_2 in uno stesso E_{s+k}. Consideriamo in S_r' l'E_{k-1}

$$(10) \qquad y_t = m_t y_1 + \sum_2^{k-1}{}_i\, n_{i,t} y_1^i \qquad (t = 2, 3, \dots, r),$$

e supponiamo che esso sia d'iperosculazione. Un $\bar{E}_{s+k}$ che lo contiene ha equazioni del tipo

$$(11) \qquad y_t = m_t y_1 + \sum_2^{k-1}{}_i\, n_{i,t} y_1^i + \sum_k^{s+k}{}_j\, \bar{p}_{j,t} y_1^j \qquad (t = 2, 3, \dots, r).$$

Esso viene mutato da T_1 e da T_2 negli E_{s+k} rispettivamente di equazioni

$$(12) \qquad x_t = m_t x_1 + \sum_2^{s+k-1}{}_i\, p_{i,t} x_1^i + p_{s+k,t} x_1^{s+k} \qquad (t = 2, 3, \dots, r),$$

$$(13) \qquad x_t = m_t x_1 + \sum_2^{s+k-1}{}_i\, p_{i,t} x_1^i + q_{s+k,t} x_1^{s+k} \qquad (t = 2, 3, \dots, r).$$

Affinchè essi coincidano, possedendo lo stesso E_{s+k-1}, deve essere

$$(14) \qquad p_{s+k,t} = q_{s+k,t} \qquad (t = 2, 3, \dots, r).$$

Calcolando al solito modo i coefficienti $p_{s+k,t}$ e $q_{s+k,t}$, le (14)

(3) Notiamo che i gruppi di termini Φ e Ψ che compaiono nelle due ultime relazioni scritte sono gli stessi in quanto sono dati dalle stesse relazioni fra i coefficienti delle $f_{i,t}$ $(i < s+1)$, delle $\bar{p}_{i,t}$, delle m_t e delle $p_{i,t}$ $(i < s+2)$.

diventano

$$(15)\qquad \begin{aligned}&\sum_{2}^{r}{}_{i}\, p_{k,i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[m_t(f_{s+1,1}-\varphi_{s+1,1})-(f_{s+1,t}-\varphi_{s+1,t})\right]+\\&+ka^{k-1}\bar p_{k,t}(f_{s+1,1}-\varphi_{s+1,1})+N_t=0\quad (t=2,3,\dots,r),\end{aligned}$$

dove le f e φ e le loro derivate parziali vanno calcolate per i valori $1, m_2, \dots, m_r$ di $x_1, x_2, \dots, x_r$ e si è indicato con N_t il gruppo dei termini in cui oltre i coefficienti delle f e φ appaiono solo le m_t e le $p_{i,t}$ con $i<k$, dipendendo tali coefficienti dall'$\bar E_{k-1}$ d'iperosculazione considerato (4).

(4) Eseguendo i calcoli per la determinazione di $p_{s+k,t}$, si ha, sostituendo le (1) nelle (11)

$$ax_t+\sum_{2}^{s}{}_{i}\, f_{i,t}+f_{s+1,t}+\sum_{s+2}^{s+k}{}_{j}\, f_{j,t}=$$

$$=m_t\Big(ax_1+\sum_{2}^{s+k}{}_{i}\, f_{i,t}\Big)+\sum_{2}^{k-1}{}_{j}\, n_{j,t}\Big(ax_1+\sum_{2}^{s+k-j+1}{}_{i}\, f_{i,t}\Big)^j+\sum_{k}^{s+k}{}_{l}\,\bar p_{l,t}\Big(ax_1+\sum_{2}^{s+k-l+1}{}_{l}\, f_{s,t}\Big)^l.$$

In questa sostituzione non si è tenuto conto dei termini che, dopo la sostituzione di $x_2, x_3, \dots, x_r$ colle (12), avrebbero dato luogo a termini di grado $>s+k$ in x_1. Ponendo uguali i coefficienti di x_1^{s+k} ottenuti al 1° e 2° membro di tale relazione, dove si sono sostituite le (12), si ha

$$ap_{s+k,t}+\sum_{2}^{s}{}_{i}\, F_{i,t}+\sum_{2}^{r}{}_{i}\, p_{k,i}\frac{\partial}{\partial x_i}f_{s+1,t}+\sum_{s+1}^{s+k}{}_{j}\,\bar F_{j,t}=$$

$$=m_t\left[\sum_{2}^{s}{}_{i}\, F_{i,1}+\sum_{2}^{r}{}_{i}\, p_{k,i}\frac{\partial}{\partial x_i}f_{s+1,1}+\sum_{s+1}^{s+k}{}_{j}\,\bar F_{j,1}\right]+\sum_{2}^{k-1}{}_{j}\,(F_j+F_j)+$$

$$+\bar p_{k,t}kf_{s+1,1}a^{k-1}+\sum_{k+1}^{k+s}{}_{l}\, F_l$$

dove le F sono relazioni tra i coefficienti delle $f_{i,t}(i<s+1)$, le m_t e le $p_{i,t}(i<s+k)$ e le $\bar F$ sono relazioni tra i coefficienti delle $f_{i,t}(i<s+k)$, le m_t e le $p_{i,t}(i<k)$. Infatti con $F_{i,t}$ e $\bar F_{j,t}$ si sono indicati i coefficienti di x_1^{s+k} nelle $f_{i,t}$ e $f_{j,t}$. Ora si ha $f_{i,t}(x_1, m_2x_1+\sum_{2}^{s+k}{}_{i}\, p_{i,2}x_1^i, \dots, m_rx_1+\sum_{2}^{s+k}{}_{i}\, p_{i,r}x_1^i)=x_1^if_{i,t}\left(1, m_2+\sum_{2}^{s+k}{}_{i}\, p_{i,2}x_1^{i-1}, \dots, m_r+\sum_{2}^{s+k}{}_{i}\, p_{i,r}x_1^{i-1}\right)$; il coefficiente richiesto è il coefficiente di x_1^{s+k-i} in

$$f_{i,t}\left(1, m_2+\sum_{2}^{s+k}{}_{i}\, p_{i,2}x_1^{i-1}, \dots, m_r+\sum_{2}^{s+k}{}_{i}\, p_{i,r}x_1^{i-1}\right),$$

il quale dipende ovviamente dalle m_t e dalle $p_{j,t}(j<s+k-i+2)$, rappresentando la derivata $(k+s-i)$-esima di tale funzione, fatta rispetto ad x_1 e calcolata per $x_1=0$ moltiplicata per $\dfrac{1}{(k+s-i)!}$. Il termine $f_{s+1,t}$ dà luogo al coefficiente $\sum_{2}^{r}{}_{i}\, p_{k,i}\dfrac{\partial}{\partial x_i}f_{s+1,t}$ e ad un termine del tipo $\bar F$. Cose analoghe valgono per i termini a 2° membro.

Essendo

$$ap_{k,i} = a^k \bar{p}_{k,i} + M_i, \tag{16}$$

dove con M_i si è indicato il gruppo dei termini in cui appaiono i coefficienti delle f e φ e gli $n_{j,t}$, si conclude che le (15) costituiscono un sistema di $r-1$ equazioni lineari nelle $r-1$ incognite $\bar{p}_{k,t}$ a determinante, in generale, $\neq 0$. La soluzione di tale sistema ci fornisce i coefficienti $\bar{p}_{k,t}$ relativi all' $\bar{E}_k$ d'iperosculazione richiesto. Il teorema è così dimostrato.

3. L'introduzione degli elementi d'iperosculazione relativi a due trasformazioni puntuali T_1, T_2 fra due spazi S_r, S_r', ci permette di associare ad una data trasformazione puntuale T elementi differenziali intrinsecamente determinati, non appena si conoscano delle trasformazioni approssimanti la T nell'intorno di una coppia regolare (O, O') di punti corrispondenti.

Orbene sono già state considerate dal VILLA (5), fra le ∞^r omografie tangenti ad una trasformazione T in una coppia (O, O'), talune omografie (dette *caratteristiche*), intrinsecamente associate a T, che subordinano fra r coppie di rette caratteristiche corrispondenti le relative proiettività caratteristiche. Tali omografie sono, in generale, $\binom{2^r-1}{r}$. Per il teorema del n. 2, per ciascuna di queste omografie si hanno $2^r - 1$ E_{k-1} d'iperosculazione relativi a T e all'omografia; questi E_{k-1} sono individuati dall'intorno di ordine k di T.

Il VILLA ha pure dimostrato (6) che è possibile associare intrinsecamente ad una trasformazione T talune trasformazioni cremoniane d'ordine r, approssimanti la T fino all'intorno del 2° ordine di una coppia regolare di punti corrispondenti. Anche gli elementi d'iperosculazione E_{k-2}, relativi a T e a ciascuna di queste trasformazioni, sono intrinsecamente caratterizzati e sono individuati dall'intorno di ordine k di T.

Dalle considerazioni precedenti seguono immediatamente con-

(5) Si veda: VILLA, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi.* Note I e II, « Rend. dell'Accademia d'Italia » ser. VII, vol. IV, p. 5, 1942; *Sull'approssimazione delle trasformazioni puntuali fra due spazi mediante trasformazioni cremoniane,* « Rend. di Matematica e delle sue applicazioni », ser. V, vol. III, p. 229, 1942.

(6) Si veda: VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari.* Nota III. *Trasformazioni cremoniane osculatrici,* « Rend. dell'Accademia dei Lincei », ser. VIII, vol. IV, 1948.

dizioni, solo necessarie, relative al contatto d'ordine s di due trasformazioni puntuali T e $\overline{T}$, in una coppia regolare di punti corrispondenti. Segue ad es.: affinchè due trasformazioni puntuali T, $\overline{T}$ abbiano, in una coppia regolare (O, O') di punti corrispondenti, un contatto di ordine s è necessario che gli elementi d'iperosculazione E_{s-1} relativi a T e alle omografie caratteristiche coincidano con gli elementi analoghi relativi a $\overline{T}$.