
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIO VOLPATO

Sulla risoluzione di una particolare equazione integrale lineare di Volterra

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 3
(1948), n.1, p. 34–40.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_1_34_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulla risoluzione di una particolare equazione integrale lineare di Volterra.

Nota di MARIO VOLPATO (a Padova).

Sunto. - Si dà una espressione approssimata del nucleo risolvante dell'equazione integrale: $\varphi(t) + \int_0^t \sum_1^{\infty} A_r e^{-a_r(t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau = f(t)$ e si stabilisce un valore maggiorante per l'errore commesso sostituendo l'espressione approssimata all'esatta.

In varie questioni, inerenti la teoria dei fenomeni ereditari, si presenta l'equazione integrale di 2^a specie:

$$(1) \quad \varphi(t) + \int_0^t K(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau = f(t)$$

ove il termine noto $f(t)$ è una funzione continua e il nucleo $K(t-\tau)$ è del tipo

$$K(t-\tau) = \sum_1^{\infty} A_r e^{-\alpha_r(t-\tau)}$$

con le α_r (a due a due distinte) e le A_r costanti positive e tali, che sia $\lim_{r \rightarrow +\infty} \alpha_r = \text{extr. sup. } \alpha_r$, e che sia convergente la serie $\sum_1^{\infty} A_r$.

È noto, dalla teoria generale di VOLTERRA, che la (1), nelle dette ipotesi, ammette certamente una e una sola soluzione; però, in pratica, non sempre ne è agevole il calcolo.

Scopo della presente Nota è di dare una espressione approssimata, di forma relativamente semplice, del nucleo risolvete, e di un valore maggiorante per l'errore commesso sostituendo questa espressione approssimata all'esatta.

Faccio notare che per il caso particolare dell'equazione

$$(2) \quad \varphi(t) + \int_0^t K_n(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t)$$

ove il nucleo

$$K_n(t-\tau) = \sum_1^n A_r e^{-\alpha_r(t-\tau)}$$

è una ridotta del nucleo della (1), il calcolo della soluzione si effettua molto facilmente ricorrendo alla trasformazione di LAPLACE. Questo risultato è stato messo in evidenza dal DOETSCH⁽¹⁾ e recentemente dallo ZANABONI⁽²⁾, che ha studiato il caso di un nucleo somma di un numero finito di termini di tipo più generale del nostro.

Seguendo questo metodo, noi ritroveremo in maniera più approfondita, il nucleo risolvete della (2) e faremo vedere che, per n sufficientemente grande, tale nucleo differisce dal nucleo risolvete della (1) di tanto poco quanto si vuole. Anzi potremo dimostrare che la (1) è risolubile senza ricorrere alla teoria di VOLTERRA.

1. Osserviamo anzitutto che per $t \geq \tau \geq 0$ la serie $\sum_1^{\infty} A_r e^{-\alpha_r(t-\tau)}$, essendo maggiorata dalla serie $\sum_1^{\infty} A_r$ a termini costanti positivi convergente, risulta totalmente convergente e quindi si possono ordinare i suoi termini in modo tale che la successione $\{\alpha_r\}$ risulti crescente.

(¹) G. DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*. [Springer, Berlino, (1937), cap. 15-IV Teil.].

(²) O. ZANABONI, *Soluzione dell'equazione integrale di Volterra, avente un particolare nucleo in $x-y$* , « Memorie dell'Accademia delle Scienze di Bologna », ser. X, vol. III, 1945-46.

Ciò premesso passiamo allo studio della (2).

L'integrale che figura nel primo membro della (2) è il prodotto integrale (in tedesco Faltung) delle due funzioni $K_n(t)$, $\varphi(t)$. Noi lo indicheremo, come è ormai abitudine, col simbolo $K_n(t) * \varphi(t)$. La (2) pertanto assume la forma:

$$(2)\text{bis} \quad \varphi(t) + K_n(t) * \varphi(t) = f(t)$$

Inoltre col simbolo $L[F(t)]$ indicheremo la trasformata di LAPLACE della funzione $F(t)$, cioè

$$(3) \quad L[F(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt$$

la quale è una funzione della variabile complessa p , definita nell'insieme di tutti i punti del piano di questa variabile per i quali l'integrale risulta convergente ⁽³⁾.

Ciò posto, applichiamo formalmente ai due membri della (2) la trasformazione di LAPLACE, e, atteso il teorema sul prodotto integrale, risolviamo rispetto alla trasformata della funzione incognita.

Si ottiene:

$$(4) \quad L[\varphi(t)] = \frac{1}{1 + L[K_n(t)]} L[f(t)].$$

Ma per p con parte reale maggiore di $-\alpha_1$ si ha:

$$(5) \quad L[K_n(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sum_1^n A_r e^{-\alpha_r t} dt = \sum_1^n \frac{A_r}{p + \alpha_r}.$$

Sicchè, posto:

$$\psi_n(p) = 1 + \sum_1^n \frac{A_r}{p + \alpha_r}$$

$$(6) \quad W_n(p) = \frac{1}{\psi_n(p)}$$

la (4) diventa:

$$(7) \quad L[\varphi(t)] = W_n(p) L[f(t)].$$

Consideriamo ora la $\psi_n(p)$ nell'intero piano complesso ed osserviamo che essa ha una singolarità polare semplice nei punti $-\alpha_r$; e che, variando p sull'asse reale si ha:

$$\lim_{p \rightarrow -\alpha_r + 0} \psi_n(p) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{p \rightarrow -\alpha_r - 0} \psi_n(p) = -\infty.$$

Allora fra due poli consecutivi la $\psi_n(p)$ ha almeno uno zero

⁽³⁾ Per tutte le applicazioni che nel presente lavoro verranno fatte dell'operazione definita dalla (3) vedi l'opera del DOETSCH, cit. in ⁽¹⁾, oppure A. GHIZZETTI, *Calcolo simbolico*. [Zanichelli, Bologna, (1943)].

reale. Inoltre, essendo

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} \psi_n(p) = 1,$$

segue che uno zero reale della $\psi_n(p)$ si trova alla sinistra di $-\alpha_n$. Ma riducendo $\psi_n(p)$ ad una sola frazione si ottiene al numeratore un polinomio di grado n in p ; allora è unico lo zero compreso fra due poli consecutivi e gli n zeri di $\psi_n(p)$ sono tutti semplici. Indichiamoli con $-\gamma_{s,n}$ ($s = 1, 2, \dots, n$).

Evidentemente è lecito supporre

$$-\alpha_{s+1} < -\gamma_{s,n} < -\alpha_s \quad (s = 1, 2, \dots, n-1).$$

Questi zeri semplici di $\psi_n(p)$ sono poli semplici per $W_n(p)$, e la loro caratteristica è

$$\frac{C_{s,n}}{p + \gamma_{s,n}},$$

ove $C_{s,n}$ è il residuo dato dalla formula:

$$C_{s,n} = \frac{1}{\psi_n'(-\gamma_{s,n})} = \frac{-1}{\sum_{r=1}^n \frac{A_r}{(\alpha_r - \gamma_{s,n})^2}}.$$

Allora per $W_n(p)$ vale la seguente scomposizione in frazioni semplici:

$$(8) \quad W_n(p) = 1 + \sum_{s=1}^n \frac{C_{s,n}}{p + \gamma_{s,n}};$$

per cui, osservato che per p con parte reale maggiore di $-\alpha_1$, oltre a valere la (5) risulta anche

$$(9) \quad \sum_{s=1}^n \frac{C_{s,n}}{p + \gamma_{s,n}} = \int_0^\infty e^{-pt} \sum_{s=1}^n C_{s,n} e^{-\gamma_{s,n} t} dt = L\left[\sum_{s=1}^n C_{s,n} e^{-\gamma_{s,n} t}\right],$$

si ha che la (7) diventa:

$$L[\varphi(t)] = L[f(t)] + L\left[\sum_{s=1}^n C_{s,n} e^{-\gamma_{s,n} t}\right] L[f(t)].$$

Ora, applicando il teorema del prodotto integrale e antitrasformando segue subito:

$$(10) \quad \varphi(t) = f(t) + \int_0^t S_n(t-\tau) f(\tau) d\tau = f(t) + S_n(t) * f(t)$$

con

$$S_n(t) = \sum_{s=1}^n C_{s,n} e^{-\gamma_{s,n} t}.$$

Facciamo vedere che la soluzione formale così trovata verifica la (2). Sostituendola nella (2) bis, con semplici passaggi, si ha:

$$f(t) * [K_n(t) + S_n(t) + K_n(t) * S_n(t)] = 0$$

la quale è soddisfatta poichè vale l'identità:

$$(11) \quad K_n(t) + S_n(t) + K_n(t) * S_n(t) \equiv 0.$$

Infatti, poichè per p con parte reale maggiore di $-\alpha_1$, vale la (5) e anche la (9), attese le posizioni fatte, si ha che la (8) diventa:

$$(12) \quad \frac{1}{1 + L[K_n(t)]} = 1 + L[S_n(t)]$$

da cui, riducendo a forma intera e antitrasformando segue subito la (11).

2. Per risolvere la (1) osserviamo anzitutto che per la totale convergenza della serie $\sum_1^\infty A_r$ segue la convergenza uniforme, per $t \geq \tau \geq 0$, della successione: $\{K_n(t - \tau)\}$ verso $K(t - \tau)$.

Noi proveremo al prossimo numero che anche la successione $\{S_n(t - \tau)\}$ converge uniformemente per $t \geq \tau \geq 0$. Supponiamo per ora acquisito questo risultato e indichiamo con $S(t - \tau)$ il $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(t - \tau)$.

Allora esiste la funzione:

$$(13) \quad \varphi(t) = f(t) + \int_0^t S(t - \tau) f(\tau) d\tau$$

e sarà soluzione dell'equazione (1) qualora si provi, come nel caso precedente, che vale l'identità:

$$K(t) + S(t) + K(t) * S(t) \equiv 0.$$

Ma questa segue immediatamente dalla (11), ossia dalla

$$(11) \text{ bis} \quad K_n(t) + S_n(t) + \int_0^t K_n(t - \tau) S_n(\tau) d\tau \equiv 0$$

qualora si passi al limite per $n \rightarrow +\infty$ e si tenga presente che per l'uniforme convergenza delle due successioni:

$$\{K_n(t)\}, \quad \{S_n(t)\}$$

si può passare al limite sotto il segno di integrale.

3. Dimostriamo ora l'uniforme convergenza della successione:

$$\{S_n(t)\} \quad \text{per } t \geq 0.$$

Intanto osserviamo che, per ogni intero q , assieme alla (12) vale anche la seguente:

$$\frac{1}{1 + L[K_{n+q}(t)]} = 1 + L[S_{n+q}(t)]$$

dalla quale, sottraendo la (12), segue facilmente:

$$L[S_{n+q}(t) - S_n(t)] = L[K_n(t) - K_{n+q}(t)] \{ 1 + L[S_{n+q}(t)] \} \{ 1 + L[S_n(t)] \}.$$

Effettuando i prodotti del secondo membro e antitrasformando si ha:

$$\begin{aligned} S_{n+q}(t) - S_n(t) = & K_n(t) - K_{n+q}(t) + \int_0^t \{ K_n(t-\tau) - K_{n+q}(t-\tau) \} S_{n+q}(\tau) d\tau + \\ & + \int_0^t \{ K_n(t-\tau) - K_{n+q}(t-\tau) \} S_n(\tau) d\tau + \\ (14) \quad & + \int_0^t \{ [K_n(t-\tau) - K_{n+q}(t-\tau)] \int_0^\tau S_{n+q}(\tau-\xi) S_n(\xi) d\xi \} d\tau \end{aligned}$$

Ora, ponendo $t=0$ nella (11) bis si ha:

$$\sum_1^n A_r = - \sum_1^n C_s, n$$

e avendo presente che ogni $\gamma_s, n > \alpha_1$, seguono, per $t > 0$, le disuguaglianze:

$$|S_n(t)| = \left| \sum_1^n C_s, n e^{-\gamma_s, nt} \right| < \left| \sum_1^n C_s, n e^{-\alpha_1 t} \right| = e^{-\alpha_1 t} \sum_1^n A_r < e^{-\alpha_1 t} A,$$

$$|K_{n+q}(t) - K_n(t)| = \sum_{n+1}^{n+q} A_r e^{-\alpha_r t} < e^{-\alpha_1 t} \sum_{n+1}^{n+q} A_r,$$

ove si è indicato con A la somma della serie $\sum_1^\infty A_r$ convergente per ipotesi.

Allora considerando nella (14) i valori assoluti, per le precedenti disuguaglianze, si ha:

$$\begin{aligned} |S_{n+q}(t) - S_n(t)| & < \sum_{n+1}^{n+q} A_r + 2A \sum_{n+1}^{n+q} A_r \int_0^t e^{-\alpha_1 \tau} d\tau + \\ & + A^2 \sum_{n+1}^{n+q} A_r \int_0^t \left[e^{-\alpha_1(t-\tau)} \int_0^\tau e^{-\alpha_1 \tau} d\xi \right] d\tau = \\ & = \sum_{n+1}^{n+q} A_r \left(1 + 2Ate^{-\alpha_1 t} + A^2 \frac{t^2}{2} e^{-\alpha_1 t} \right) \end{aligned}$$

e poichè la funzione

$$te^{-\alpha_1 t}$$

per $t = \frac{1}{\alpha_1}$ ammette massimo assoluto che vale $\frac{1}{\alpha_1 e}$ e la funzione

$$\frac{t^2}{2} e^{-\alpha_1 t}$$

per $t = \frac{2}{\alpha_1}$ ammette massimo assoluto che vale $\frac{2}{\alpha_1^2 e^2}$ si ha:

$$(15) \quad |S_{n+q}(t) - S_n(t)| < \sum_{n+1}^{n+q} A_r \left(1 + \frac{2A}{\alpha_1 e} + \frac{2A^2}{\alpha_1^2 e^2} \right)$$

che, per n sufficientemente grande, attesa la convergenza della serie $\sum_1^\infty A_r$, è piccolo quanto si vuole.

Pertanto la successione: $\{S_n(t)\}$, per $t > 0$, converge uniformemente verso $S(t)$.

Se nella (15) passiamo al limite per $q \rightarrow +\infty$, si ha:

$$(16) \quad |S(t) - S_n(t)| \leq \left(A - \sum_1^n A_r\right) \left(1 + \frac{2A}{\alpha_1 e} + \frac{2A^2}{\alpha_1^2 e^2}\right)$$

la quale formula dà una maggiorazione dell'errore che si commette assumendo il nucleo risolvante della (2) come nucleo risolvante della (1).

Osservazione. - Si prova facilmente che, per un fissato s , la successione: $\{\gamma_{s,n}\}$ è decrescente e limitata inferiormente da α_s . Allora la successione converge e, posto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_{s,n} = \gamma_s$$

si ha, per $s=1$, il numero positivo γ_1 che come il numero α_1 è minore di ogni $\gamma_{s,n}$. Sicchè il ruolo di α_1 nella precedente dimostrazione può essere tenuto da γ_1 , e poichè $\gamma_1 > \alpha_1$ si avrebbe infine una migliore valutazione dell'errore. Noi abbiamo mantenuto α_1 perchè in pratica, pur sapendo che il $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_{s,n}$ esiste, non sempre è calcolabile.