Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Muracchini

Sulla specie degli angoli dei poliedri generalizzati

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.1, p. 32–34.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_1_32_0>

Sulla specie degli angoli dei poliedri generalizzati.

Nota di LUIGI MURACCHINI (a Bologna) (*).

Sunto. - *Estensione ai poliedri di genere qualunque di certi risultati del* LEBESGUE *sui poliedri euleriani.*

Il LEBESGUE, in uno dei suoi ultimi lavori (1), ha riottenuto ed esteso alcuni risultati di WERNICKLE (2) e di FRANKLIN (3) sui poliedri euleriani, con un metodo notevole che consiste in una semplice discussione aritmetica della formula di EULERO opportunamente manipolata. Per consiglio del prof. B. SEGRE, io qui uso tale metodo per conseguire risultati analoghi concernenti poliedri di genere qualunque. Ringrazio sentitamente il prof. SEGRE per i suoi preziosi consigli, e per l'aiuto datomi nella redazione della presente Nota.

1. Per un qualunque poliedro di genere $p (\geq 0)$ vale la classica formula di EULERO generalizzata

$$V - S + F = 2 - 2p \tag{1}$$

dove V, S ed F denotano rispettivamente i numeri dei vertici, degli spigoli e delle facce del poliedro. Ad ogni faccia resta associato un intero $f \geq 3$, uguale al numero dei suoi lati (ciascuno dei

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(1) « Journ. de Math. », ser. 9, tom. 19, fasc. I (1940), p. 27.

(2) « Math. Ann. », vol. 58 (1903), p. 413.

(3) « Amer. J. of Math. », vol. 44 (1922), p. 225.

quali è uno spigolo del poliedro); dualmente, ad ogni vertice resta associato un intero $v \geq 3$ uguale al numero degli spigoli del poliedro uscenti da esso. Una faccia ed un vertice che si appartengono determinano un ente *autoduale*, che chiameremo un *angolo del poliedro*, definibile mediante i due lati della faccia uscenti dal vertice ossia dai *due lati dell'angolo*. Diremo che *l'angolo è di specie* (f, v) per esprimere ch'esso è inerente ad una faccia f-gona e ad un vertice v-edro.

Denotiamo con N_f^v il numero (intero non negativo) degli angoli del poliedro di specie (f, v). Allora abbiamo

$$2\Sigma N_f^v = 4S,$$

in quanto ogni angolo ha per lati due spigoli del poliedro, mentre ogni spigolo è lato di quattro angoli. Risulta inoltre

$$\Sigma \frac{N_f^v}{f} = F,$$

poichè ogni faccia f-gona contiene f angoli e quindi contribuisce per un'unità nella somma a primo membro.

Dualmente si ha

$$\Sigma \frac{N_f^v}{v} = V.$$

La (1) può dunque scriversi nella forma

$$\Sigma N_f^v\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{f} - \frac{1}{2}\right) = 2 - 2p \tag{2}$$

già ottenuta dal LEBESGUE per $p = 0$.

2. Distinguiamo ora tre casi, secondochè $p = 0$, $p > 1$ o $p = 1$.

a) Se $p = 0$ il secondo membro della (2) è *positivo* onde vi sarà almeno una coppia di interi $f \geq 3$, $v \geq 3$ per cui risulta

$$N_f^v \geq 1, \qquad \frac{1}{v} + \frac{1}{f} - \frac{1}{2} > 0.$$

L'ultima limitazione non sussiste se $f \geq 4$ e $v \leq 4$, ond'essa implica che almeno uno degli interi f, v valga tre, e quindi l'altro sia inferiore a sei.

b) Se $p > 1$ il secondo membro della (2) è *negativo*, onde vi sarà almeno una coppia di interi $f \geq 3$, $v \geq 3$ per cui risulta

$$N_f^v \geq 1, \qquad \frac{1}{v} + \frac{1}{f} - \frac{1}{2} < 0.$$

L'ultima limitazione non sussiste se $f \leq 4$ e $v \leq 4$, ond'essa implica che almeno uno degli interi f, v valga cinque o più. Se poi $f \leq 5$ e $v \leq 5$, da quella si deduce che è $v = f = 5$, od $f = 5$ e $v = 4$, oppure $v = 5$ ed $f = 4$.

c) Se $p = 1$ il secondo membro della (2) si annulla, onde la somma a primo membro conterrà termini di segni opposti, tranne che per ogni angolo del poliedro risulti

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{f} - \frac{1}{2} = 0$$

eppertanto od $f = 3$ e $v = 6$, o $v = f = 4$, oppure $f = 6$ e $v = 3$.

Possiamo in conclusione dire che:

a) *Ogni poliedro di genere zero contiene sempre qualche faccia triangolare con un vertice da cui escono meno di sei spigoli, oppure qualche faccia con meno di sei lati avente un vertice triedro.*

b) *Ogni poliedro di genere superiore all'unità contiene sempre qualche faccia con più di cinque lati o qualche vertice da cui escono più di cinque spigoli, oppure qualche faccia pentagonale con un vertice tetraedro o pentaedro, od infine qualche faccia quadrangolare con un vertice pentaedro.*

c) *Per un poliedro di genere uno valgono simultaneamente i fatti asseriti in* a) *e* b), *tranne ch'esso non possegga che faccie triangolari o quadrangolari od esagonali, i cui vertici siano tutti rispettivamente esaedri o tetraedri o triedri.*

Il teorema a) trovasi già in LEBESGUE, *loc. cit.*, insieme ad altri risultati concernenti il caso $p = 0$. Questi ultimi potrebbero venire estesi a p qualunque mediante proposizioni relative ai due casi $p > 1$ e $p = 1$, legate a quelli da affinità analoghe a quelle che intercedono fra i teoremi b). c) ed il teorema a). Tali estensioni non presentano difficoltà, esse però sono formalmente complicate e geometricamente poco significative, e quindi non mi ci soffermo.