Bollettino
Unione Matematica Italiana

Enzo Aparo

Sul calcolo delle radici di un'equazione algebrica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.1, p. 25–32.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_1_25_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1948.

Sul calcolo delle radici di un'equazione algebrica.

Nota di ENZO APARO (a Roma) (*).

Sunto. - *La conoscenza di domini del piano complesso separanti le radici di un'equazione algebrica consente la rapida approssimazione di queste mediante il metodo di* NEWTON, *convenientemente esteso, e la relativa maggiorazione dell'errore.*

Nella presente nota sono esposti, insieme ad alcuni teoremi la cui applicazione permette di raggiungere la separazione sopraddetta, varî accorgimenti intesi a semplificare i calcoli occorrenti.

1. Delimitazione delle radici.

1.1. Sia assegnata l'equazione

$$(1) \qquad f(z) \equiv z^n + c_{n-1}z^{n-1} + c_{n-2}z^{n-2} + \ldots + c_1 z + c_0 = 0,$$

e, per $1 \leq k \leq n$, si ponga

$$f_k(z) \equiv z^k + c_{n-1}z^{k-1} + \ldots + c_{n-k},$$

$$p_k(\lambda) = \left\{ \frac{|c_0|}{\lambda^{n-k}} + \frac{|c_1|}{\lambda^{n-k-1}} + \ldots + \frac{|c_{n-k-1}|}{\lambda} \right\}^{\frac{1}{k}}$$

ove λ è una quantità positiva arbitrariamente fissata.

([13]) Cfr. di tale A. i lav. cit. in ([3]) e ([5]).

([14]) Solo rilevo che il significato topologico del tactinvariante T', com'è esposto al n. 5, in relazione alle V_0 dello S_3, si estende senza modifiche alle V_0 dello S_r, con r qualunque.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo in Roma.

Se z è tale da verificare simultaneamente le due relazioni

$$|z| > \lambda,$$
$$|f_k(z)| > \sum_{h=0}^{n-k-1} \frac{|c_h|}{\lambda^{n-k-h}} = p_k{}^k,$$

risulta pure

$$\frac{|f(z)|}{|z^{n-h}|} \geq |f_k(z)| - \left| \sum_{h=0}^{n-k-1} \frac{c_h}{z^{n-k-h}} \right| > |f_k(z)| - \sum_{h=0}^{n-k-1} \frac{|c_h|}{\lambda^{n-k-h}} > 0.$$

onde il teorema:

I. *Ogni radice della* (1) *che sia esterna al cerchio* C(0, λ) *avente il centro nell'origine e raggio* λ, *è contenuta nel dominio* T(f_k, p_k) *luogo dei punti del piano* z *per cui*

$$|f_k(z)| \leq p_k{}^k.$$

Alla considerazione del dominio $T(f_k, p_k)$ può sostituirsi quella di cerchi, aventi i centri nei punti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, radici distinte dell'equazione $f_k(z) = 0$, con molteplicità $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$. Posto

$$d_{hl} = |\alpha_h - \alpha_l|.$$
$$d_h = \min(d_{h1}, d_{h2}, \ldots, d_{hs}) \quad (h \neq l;\ h, l = 1, 2, \ldots, s) \tag{2}$$
$$d = \min(d_1, d_2 \ldots, d_s)$$

si può enunciare il teorema seguente (1):

II. *Per* $p_k \leq \frac{d}{2}$, T(f_k, p_k) *è contenuto nella somma di* s *cerchi* C(α_h, r_h), *dove* r_h *è la minima radice positiva dell'equazione*

$$x^{\mu_h}(d_h - x)^{k-\mu_h} - p_k{}^k = 0. \tag{3}$$

La delimitazione conseguita mediante i teoremi I e II può essere migliorata facendo uso del teorema

III. *Detta* L_1 *l'unica radice positiva dell'equazione*

$$x^n - \sum_{h=0}^{n-1} |c_h| x^h = 0,$$

e L_2 *l'unica radice positiva dell'altra*

$$|c_0| x^n - \sum_{h=1}^{n} |c_h| x^{n-h} = 0,$$

la corona circolare avente il centro nell'origine, raggio interno $\frac{1}{L_2}$ *e raggio esterno* L_1, *delimita le radici dell'equazione* (1).

(1) Per la dimostrazione di tale teorema e degli altri che ci limiteremo ad enunciare, cfr. PICONE, *Lezioni di Algebra*. Roma, Veschi, 1945.

1.2. Esaminiamo quali criteri convenga seguire in pratica nella scelta delle quantità k e λ. La costruzione dei cerchi contenenti $T(f_k, p_k)$ richiede la conoscenza di tutte le radici, reali e complesse dell'equazione di grado k, $f_k(z)=0$; ci si limiterà quindi ad assumere $k \leq 3$. Per λ prendiamo il più piccolo valore tale da rendere

$$p_k(\lambda) \equiv \left\{ \frac{|c_0|}{\lambda^{n-k}} + \frac{|c_1|}{\lambda^{n-k-1}} + \ldots + \frac{|c_{n-k-1}|}{\lambda} \right\}^{\frac{1}{k}} \leq \frac{d}{2}$$

approssimando a tale scopo l'unica radice positiva dell'equazione di grado $n-k$, $p_k(\lambda)=\frac{d}{2}$. Un esempio mostrerà come si possano successivamente trovare delimitazioni, che migliorano quella ottenuta mediante i valori di λ e di k ora indicati.

Sia

$$(4)\quad f(z) \equiv z^8 - z^7 - 2z^6 + 100z^5 + 22z^4 - 55z^3 + 33z^2 - 537{,}824 = 0,$$
$$f_3(z) \equiv z^3 - z^2 - 2z + 100.$$

Le radici dell'equazione $f_3(z)=0$ sono:

$$\alpha_1 = -4{,}465$$
$$\alpha_2 = 2{,}732 + 3{,}864i\,; \qquad \alpha_3 = 2{,}732 - 3{,}864i$$

onde, con le notazioni già introdotte.

$$d_{12} = 8{,}169, \qquad d_{13} = 8{,}169, \qquad d_{23} = 7{,}728, \qquad d = 7{,}728$$
$$p_3{}^3(\lambda) = \frac{537{,}824}{\lambda^5} + \frac{33}{\lambda^3} + \frac{55}{\lambda^2} + \frac{22}{\lambda}.$$

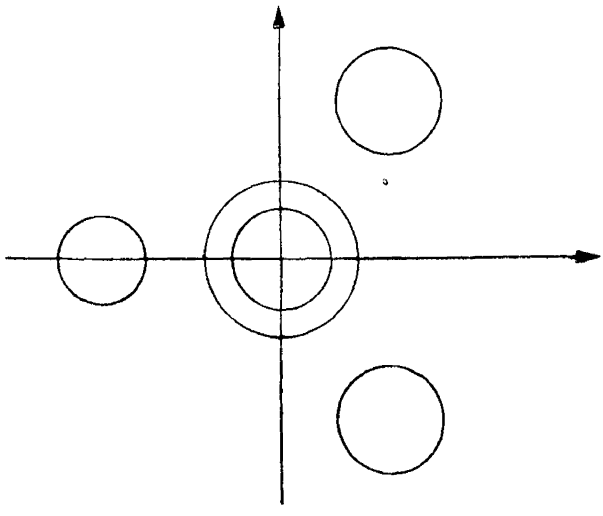

Fig. 1.

Risulta $p_3^3(\lambda) < \left(\frac{d}{2}\right)^3 = 57{,}691$, per $\lambda > \lambda_1$, dove λ_1 è l'unica radice positiva dell'equazione

$$57{,}691\lambda^5 - 22\lambda^4 - 55\lambda^3 - 33\lambda^2 - 537{,}824 = 0,$$

che vale circa 1,9, e per tale scelta del parametro λ le equazioni (3) si scrivono:

$$x(8{,}169 - x)^2 - 53{,}3462 = 0,$$
$$x(7{,}728 - x)^2 - 53{,}3462 = 0,$$
$$x(7{,}728 - x)^2 - 53{,}3462 = 0,$$

da cui $r_1 = 1{,}06$; $r_2 = r_3 = 1{,}29$. Le radici dell'equazione (4) sono quindi contenute nell'insieme somma del cerchio avente il centro nell'origine e raggio 1,9 e dei tre cerchi aventi i centri nei punti α_1, α_2, α_3 e raggi rispettivamente r_1, r_2, r_3. Per il teorema III, si può inoltre affermare che tali radici non cadono nel cerchio avente il centro nell'origine e raggio $\frac{1}{L_2} = 1{,}25$, dove L_2 è l'unica radice positiva dell'equazione

$$537{,}824x^8 - 33x^6 - 55x^5 - 22x^4 - 100x^3 - 2x^2 - x - 1 = 0.$$

La delimitazione è riportata nella fig. 1.

Assumiamo ora $\lambda = \lambda_2$, dove λ_2 è un valore per difetto della minima distanza dell'insieme $\sum_{h=1}^{3} (C(\alpha_h, r_h(\lambda_1))$ dall'origine; poichè da

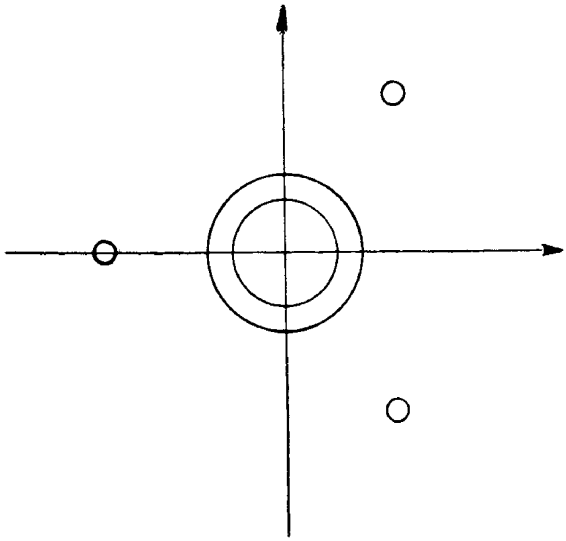

Fig. 2.

$\lambda_2 > \lambda_1$ segue $r_h(\lambda_2) < r_h(\lambda_1)$, e il cerchio $C(0, \lambda_2)$ non ha punti in comune con i cerchi $C(\alpha_h, r_h(\lambda_1))$, la delimitazione precedente viene

migliorata sostituendo a questi ultimi i cerchi $C(\alpha_h,\ r_h(\lambda_2))$. Nell'esempio che abbiamo considerato, si perviene, per $\lambda_2 = 3{,}4$ a delimitare le radici dell'equazione (4) mediante la corona circolare di centro nell'origine, raggio esterno 1,9, raggio interno 1,25, e i tre cerchi

$$C(\alpha_1;\ 0{,}22), \qquad C(\alpha_2;\ 0{,}24), \qquad C(\alpha_3;\ 0{,}24)$$

(vedi fig. 2).

2. Separazione delle radici.

2.1. La determinazione di domini del piano complesso, ciascuno contenente una e una sola radice dell'equazione $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = 0$, può essere effettuata mediante il seguente teorema:

IV. *Se* f(z) *non ha nulla la parte reale dell'ultimo coefficiente e non possiede radici sulla retta* $y = k$, *il numero di queste, ciascuna contata tante volte quante volte è multipla, situate al di sopra di tale retta, è dato da*

$$\frac{n}{2} - \frac{1}{2} E \frac{v(x,\ k)}{u(x,\ k)}. \tag{5}$$

Se f(z) *non possiede radici sulla retta* $x = h$, *il numero di queste, a destra di tale retta, è dato da*

$$\begin{cases} \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2} E \dfrac{v(h,\ y)}{u(h,\ y)} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \dfrac{n}{2} - \dfrac{1}{2} E \dfrac{u(h,\ y)}{v(h,\ y)} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases} \tag{6}$$

Il simbolo $E\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ denota l'eccesso algebrico della funzione razionale $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, propria e ridotta ai minimi termini, che è possibile calcolare mediante la formula

$$E\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = v[\psi,\ \varphi,\ r_1,\ r_2, \ldots r_\nu]_{-\infty} - v[\psi,\ \varphi,\ r_1,\ r_2, \ldots r_\nu]_{+\infty} \tag{7}$$

dove $-r_1$ è il resto della divisione di ψ per φ, $-r_2$ il resto della divisione di φ per r_1, e così via sino a $-r_\nu$, ultimo resto non nullo: $v[\psi,\ \varphi,\ r_1,\ r_2, \ldots, r_\nu]_{-\infty}$ indica il numero delle variazioni di segno presentate dalla successione $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\psi(x)}{|\psi(x)|}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|}$, ..., $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{r_\nu(x)}{|r_\nu(x)|}$, e analogamente per $v[\psi,\ \varphi,\ r_1,\ r_2, \ldots, r_\nu]_{+\infty}$.

2.2. Vogliamo mostrare su un esempio come risulti conveniente, nel caso che $f(z)$ sia a coefficienti reali, anzichè applicare diretta-

mente le formule (6), calcolando $u(h, y)$, $v(h, y)$ e successivamente $E\dfrac{v(h, y)}{u(h, y)}$ oppure $E\dfrac{u(h, y)}{v(h, y)}$, sviluppare invece mediante lo schema di HORNER $f(\zeta + h) = U(\zeta) + iV(\zeta)$ secondo le potenze di $\zeta = \xi + i\eta$ e trovare il numero degli zeri di $F(\zeta)$ aventi parte reale positiva.

Posto $z = \zeta + 2$, l'equazione (4) diviene

$$\zeta^8 + 15\zeta^7 + 96\zeta^6 + 440\zeta^5 + 1742\zeta^4 + 5033\zeta^3 + 8871\zeta^2 + 8368\zeta + \\ + 2706{,}176 = 0$$

e si ha immediatamente:

$$U(0, \eta) = \eta^8 - 96\eta^6 + 1742\eta^4 - 8871\eta^2 + 2706{,}176$$
$$V(0, \eta) = -15\eta^7 + 440\eta^5 - 5033\eta^3 + 8368\eta.$$

per trovare $E\dfrac{V(0, \eta)}{U(0, \eta)}$, si possono calcolare i coefficienti di $r_1, r_2, \ldots, r_7$ secondo lo schema seguente

	1	−96	1742	−8871	2706,176	−15	440	−5033	8368	0,06667
0.225		66,667	−1406,467	8313,133	−2706,176		−123,545	3162,545	−7759,110	0,5396
−0,4117			−300,088	−4126,205	2706,176			−4861.285	8873,231	−0,06173
1,04 1				4673,952	−2706,176				−6058,591	
					2706,176					

Nella seconda colonna della tabella sopra riportata sono scritti i coefficienti di $U(0, \eta)$ e dei resti di indice dispari, nella terza i coefficienti di $V(0, \eta)$ e dei resti di indice pari, calcolati moltiplicando ordinatamente i coefficienti di ciascun divisore per il coefficiente del relativo quoziente, cambiato di segno, e sommando tali prodotti ai coefficienti del dividendo. Per la formula (7), si ha $E\dfrac{V(0, \eta)}{U(0, \eta)} = -4$, onde, tenendo presente la prima delle (6), a destra della retta $x = 2$ cadono due radici dell'equazione (4), la cui separazione (vedi fig. 2) è conseguita mediante i due cerchi aventi il centro nei punti $2{,}732 \pm 3{,}864i$ e raggio 0,24.

2.3. Un procedimento analogo a quello dicotomico per la ricerca delle radici reali, facendo uso dello schema precedentemente indicato, e applicando direttamente le formule (5) e (7), conduce a separare tutte le radici dell'equazione (4) mediante i cerchi $C(\alpha_2; 0{,}24)$, $C(\alpha_3; 0{,}24)$, i quadrati aventi lato 0,1 e centro nei punti $(-1{,}25; \pm 0{,}75)$, $(0{,}45; \pm 1{,}25)$ e gli intervalli dell'asse reale $-4{,}5 \leq x \leq -4{,}3$ e $1{,}4 \leq x \leq 1{,}5$.

3. Calcolo delle radici.

Indichiamo con T_h il dominio che separa la radice β_h, avente molteplicità ν_h, dell'equazione (1), e con Δ_h la minima distanza tra la frontiera di T_h e quelle dei domini separanti le rimanenti radici della (1); il calcolo della radice β_h può essere effettuato mediante il teorema seguente, dovuto a L. CESARI, estensione al campo complesso del metodo di NEWTON:

V. *Se risulta*

$$\text{diam } T_h < \frac{\Delta_h}{4(n-\nu_h)} \tag{8}$$

la successione

$$z_1 = z_0 - \frac{f(z_0)}{f'(z_0)}, \quad z_2 = z_1 - \frac{f(z_1)}{f'(z_1)}, \ldots, \quad z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \tag{9}$$

approssima la radice β_h *della* (1), *contenuta in* T_h, *risultando inoltre*

$$|\alpha_h - z_n| < \text{diam } T_h \cdot \sigma_h^n$$

dove σ_h *è un numero positivo minore di* 1 *e tale da aversi*

$$\text{diam } T_h < \frac{1-\nu_h(1-\sigma_h)}{1+\sigma_h} \cdot \frac{\Delta_h}{2(n-\nu_h)}.$$

Assunto per z_0 il centro di T_h, si può in pratica sperimentare la convergenza del metodo indicato mediante l'esame della stabilità delle cifre decimali nelle prime approssimazioni (9), pur non risultando eventualmente verificata la formula (8). Nel caso dell'equazione (4) si trova, ad esempio, per la radice contenuta in $C(\alpha_2;\ 0{,}24)$,

$$z_0 = 2{,}73 + 3{,}86i$$
$$z_1 = 2{,}784937 + 3{,}923970i$$
$$z_2 = 2{,}779984 + 3{,}894921i$$
$$z_3 = 2{,}779984 + 3{,}894924i.$$

Si potrebbe pensare di sostituire alle quantità Δ_h il confine inferiore Δ della mutua distanza tra le radici dell'equazione (1), dato dalla formula comunemente indicata

$$\Delta = \frac{\sqrt{|D|}}{(2\rho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}$$

dove D è il discriminante dell'equazione, e ρ il raggio di un cerchio contenente tutte le radici di essa, supposte semplici, ma tale formula fornisce spesso risultati privi di alcuna utilità pratica. Valga

a mostrare ciò l'esempio della (4), in cui, preso $\rho = 5$, si ha

$$\Delta = 3{,}3 \cdot 10^{-12}.$$

mentre il calcolo effettuato secondo il teorema V fa trovare per le radici della (4) i valori $\beta_1 = -4{,}340894$; $\beta_2 = -1{,}243198 + 0{,}736676i$; $\beta_3 = -1{,}243198 - 0{,}736676i$; $\beta_4 = 0{,}430382 + 1{,}287196i$; $\beta_5 = 0{,}430382 - 1{,}287196i$; $\beta_6 = 1{,}406557$; $\beta_7 = 2{,}779984 + 3{,}894924i$; $\beta_8 = 2{,}779984 - 3{,}894924i$, ciò che fornisce per la mutua distanza tra due quali si vogliano radici il minimo 0,86. A tale valore si approssima bene il minimo 0,5 delle quantità Δ_h calcolate assumendo come domini T_h quelli indicati in 2 · 3.