BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FRANCESCO SEVERI

Sul gruppo di monodromia d'uno spazio lineare multiplo diramato

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 3
(1948), n.1, p. 1-3.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_1_1_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

SEZIONE SCIENTIFICA

PICCOLE NOTE

Sul gruppo di monodromia d'uno spazio lineare multiplo diramato.

Nota di FRANCESCO SEVERI (a Roma).

Sunto. - *Si dimostra che il gruppo di monodromia oggetto della Nota è il gruppo totale.*

Si tratta del gruppo Γ di monodromia della proiezione generica d'una varietà algebrica irriducibile V_k^n , d'ordine n e di dimensione k , di S_r , da un S_{r-k-1} , Ω , sopra un S_k , che rappresenta n -piamente V , con la varietà di diramazione D ⁽¹⁾.

Preso un punto O di S_k , fuori di D , le sostituzioni di Γ corrispondono alle circolazioni di un punto di S_k (cioè della sua riemanniana) da O ad O , lungo i cicli lineari orientati che escono da O e non incontrano D (cioè la sua riemanniana).

1. Vogliamo provare che l'è il gruppo totale delle sostituzioni su n elementi (quando, beninteso, Ω è generico). Basta all'uopo dimostrare che l'involuzione razionale γ_n^k che, su V , risponde ai punti di S_k , non è composta con un'involuzione d'ordine inferiore.

⁽¹⁾ Ho esaminato le circostanze fondamentali di questa rappresentazione nelle lezioni di geometria superiore, che tengo quest'anno all'Università di Roma, e che escono in dispense litografiche col titolo, *Introduzione alla geometria algebrica-Geometria numerativa* (Edizioni Docet, Roma, 1948). Le circostanze cui alludo erano state brevemente ricordate, nel caso più generale di varietà multiple, nella mia Memoria, *Le varietà multiple diramate e il loro teorema di esistenza* (« *Memorias de Matemática del Instituto Jorge Juan* », Madrid, 1946; ved. specialmente l'Oss. 2^a a pag. 7).

Amnesso questo, siccome la tangente generica a V in un suo punto semplice generico ha ivi con V un incontro bipunto, per Ω passa qualche $S_{,-k}$ avente in un punto semplice T di V molteplicità d'intersezione 2 con V e incontrante altrove V in $n-2$ punti (semplici) distinti tra loro e da T . Pertanto Γ contiene una trasposizione, corrispondente ad un cappio da O , concatenato semplicemente con D , attorno alla proiezione di T : onde Γ è il gruppo totale ⁽¹⁾, non potendo essere imprimitivo, perchè γ_n^k non è composta ⁽²⁾.

2. Tutto dunque riducesi a provare che γ_n^k non è composta. E perciò basta mostrare che non è composta la serie lineare g_n^1 staccata sulla curva irriducibile C , sezione di V con un generico $S_{,-k+1}$ per Ω , dagli $S_{,-k}$ per Ω .

La questione di sapere se una serie lineare semplice g_n^e , sopra una curva irriducibile (com'è la serie delle sezioni iperpiane di C), possa o no avere le proprie serie subordinate composte — basta anzi prendere in esame soltanto le g_n^1 — non è stata mai, ch'io mi sappia, approfondita dal punto di vista algebrico-geometrico, essendosi considerato evidente, quando la questione si è presentata, che tali g_n^1 son semplici ⁽³⁾.

Ma nel fatto la proprietà non è evidente. Ne indichiamo qui la prova nell'ordine d'idee della geometria italiana. Avvertiamo però che la proprietà medesima è da tempo conosciuta (per ogni serie semplice g_n^e , donde segue senz'altro per le g_n^e semplici con $e > 2$), attraverso due lavori di A. KNESER ⁽⁴⁾, poggianti l'uno sulla

⁽¹⁾ Ved. p. es. L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois*. (Pisa, Spoerri, 1900, p. 28).

⁽²⁾ Si suppone già stabilito che il luogo dei sistemi d'imprimitività appartenenti ai singoli gruppi d'un'involuzione algebrica a gruppo di monodromia imprimitivo, formano una varietà *algebraica* (cioè costruibile con operazioni algebriche): il che consegue ovviamente dalla teoria di GALOIS (ved. p. es. BIANCHI, l. c., pag. 160).

⁽³⁾ Cfr. ENRIQUES, *Sul gruppo di monodromia delle funzioni algebriche appartenenti ad una data superficie di Riemann* (* Rend. Reale Accademia dei Lincei », vol. XIII₅, 1904, p. 382).

⁽⁴⁾ *Irreductibilität und Monodromiegruppe algebraischer Gleichungen* (Inauguraldissertation, Berlin, 1885, p. 31); *Die Monodromiegruppe einer algebraischen Gleichung bei linearen Transformationen der Variablen* (* Mathematische Annalen », Bd. 28, 1887, p. 125). KNESER prova che il gruppo di monodromia della $y(x)$ definita dalla $f(x, y) = 0$ (curva algebrica irriducibile), fatta precedere una generica affinità, è il gruppo totale: caso particolare del teorema che qui si dimostra ($r = 2$, $k = 1$). Ma il caso par-

teoria delle funzioni analitiche, e l'altro sulla teoria delle funzioni algebriche dal punto di vista dell'eliminazione.

La nostra dimostrazione è estremamente più semplice: si riduce a poche parole, come vedremo nel n. successivo.

3. È ovvio che se una g_n^ρ ($\rho > 1$) è composta, ogni sua serie subordinata è composta con la stessa involuzione. Viceversa proviamo che:

Se entro una g_n^ρ ($\rho > 1$) sopra una curva irriducibile C, la generica g_n^1 è composta, anche g_n^ρ è composta con la stessa involuzione che compone g_n^1 .

Assumasi un gruppo generico G della data g_n^ρ e mostriamo anzitutto che le $\infty^{\rho-1}g_n^1$ di g_n^ρ , che contengono G , son composte con la stessa involuzione γ_μ^1 , che compone una g_n^1 , diciamola g , genericamente fissata nel loro sistema Σ . Infatti, variando la g_n^1 in Σ , la relativa γ_μ^1 varia con continuità o resta fissa. La seconda alternativa si verifica senz'altro se γ_μ^1 è irrazionale: e ciò pel noto teorema di HUMBERT-CASTELNUOVO (1). E se γ_μ^1 resta fissa, la proprietà da dimostrarsi per le serie di Σ è già acquisita.

In caso contrario γ_μ^1 è una g_μ^1 variabile, associata alla g_n^1 variabile in Σ . D'altronde al variare di g_n^1 , a partire da $\bar{g}$, i gruppi di g_μ^1 , che compongono G , restano fissi, perchè non posson variare con continuità, come dovrebbero; epperò la serie g_μ^1 eventualmente variabile ha in comune con la serie g_μ^1 fissa, relativa a $\bar{g}$, $\frac{n}{\mu} (> 1)$ gruppi totali. Pertanto le due serie coincidono. La proprietà preliminare è così dimostrata.

Poichè, presa una g_n^1 qualunque di g_n^ρ , la g_n^1 che congiunge un gruppo di questa con $\bar{G}$, trovasi nella condizione di avere un gruppo comune con $\bar{g}$, epperò di esser composta con la g_μ^1 trovata, e di avere un gruppo comune con la g_n^1 scelta, questa risulta composta ancora con tale g_μ^1 ; e si conclude, come volevasi, che la g_n^ρ è composta con la medesima g_μ^1 .

tiolare equivale in sostanza al caso generale: lo si riconosce subito. E da ciò deriva altresì la semplicità della g_n^1 relativa a quella $y(x)$. Il risultato di ENRIQUES coincide con quello di KNESER; però la dimostrazione, come si è accennato, poggia sulla semplicità della g_n^1 , che si suppone già acquisita per la semplicità della serie delle sezioni rettilinee di $f(x, y) = 0$.

(1) Ved. p. es. SEVERI, *Trattato di geometria algebrica*. (Bologna. Zanichelli, 1926, vol. I, p. 270).