

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

VITTORIO EMANUELE GALAFASSI

## I tactinvarianti nella topologia dello spazio proiettivo

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 3*  
(1948), n.1, p. 18–25.

Zanichelli

<[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1948\\_3\\_3\\_1\\_18\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_1_18_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

## I tactinvarianti nella topologia dello spazio proiettivo.

Nota di VITTORIO EMANUELE GALAFASSI (a Pavia).

**Sunto.** *Si stabilisce il significato topologico del segno del tactinvariante  $T$  di due superficie algebriche reali quando gli ordini di queste abbiano la stessa parità, ed il segno di  $T$  sia perciò essenziale. Per ordini di diversa parità si fornisce invece la spiegazione topologica dell'impossibilità di attribuire un significato al segno di  $T$ .*

*Si stabilisce infine il significato topologico del segno del tactinvariante di tre superficie algebriche reali, dopo aver rilevato che tale segno è sempre essenziale.*

1. Condizione necessaria e sufficiente affinchè due superficie algebriche  $F^m$  ed  $F^n$  (dello spazio ordinario, generali nei rispettivi ordini  $m$  ed  $n$ ) si tocchino è notoriamente l'annullarsi di un'espressione  $T$  razionale intera nei coefficienti di  $F^m$  e di  $F^n$ , detta *tactinvariante* delle due superficie <sup>(1)</sup>.

Se si vuole, l'espressione  $T$  può considerarsi in relazione alla curva algebrica  $C^{mn}$  intersezione completa delle due superficie  $F^m$  ed  $F^n$ , e perciò verrà anche detta tactinvariante della  $C^{mn}$ : la  $T=0$  è allora condizione necessaria e sufficiente affinchè la  $C^{mn}$  abbia un punto doppio.

Indicati con  $\alpha$  (e risp.  $\beta$ ) il grado con cui i coefficienti di  $F^m$  risp. di  $F^n$ ) entrano nella espressione  $T$ , risulta — com'è ben

<sup>(1)</sup> Cfr. G. SALMON, *Analytic Geometry of three dimensions*, vol. II (3<sup>a</sup> ed., London 1915), pag. 255. Per i tactinvarianti di ipersuperficie nello  $S_r$ , cfr. T. R. HOLLCROFT, *Tact-invariants of primals in  $S_r$* , « Journ. of London Math. Soc. », 11 (1936), pp. 22-24.

noto <sup>(2)</sup> —

$$\alpha = n(n-1)^2 + 2n(n-1)(m-1) + 3n(m-1)^2$$

$$\beta = m(m-1)^2 + 2m(m-1)(n-1) + 3m(n-1)^2,$$

e perciò che entrambi i gradi  $\alpha$  e  $\beta$  sono pari quando  $m$  ed  $n$  abbiano la stessa parità, e che uno di essi è invece dispari quando  $m$  ed  $n$  abbiano parità diversa.

Se si suppongono  $F^m$  ed  $F^n$  reali, e quindi anche  $C^{mn}$  reale, risulta così che il segno del tactinvariante  $T$  per una  $C^{mn}$  priva di punti doppi ( $T \neq 0$ ), ha significato quando  $m$  ed  $n$  abbiano la stessa parità, ed è invece inessenziale quando  $m$  ed  $n$  abbiano parità diversa.

Nel presente lavoro, dopo qualche preliminare (n. 2, 3), si fa vedere (n. 4) come per  $m$  ed  $n$  della stessa parità il segno di  $T$  risponda alla parità del numero dei circuiti della  $C^{mn}$ , mentre si rileva che la mancanza di significato per il segno di  $T$  quando  $m$  ed  $n$  non abbiano la stessa parità risponde alla circostanza topologica che in tale ipotesi (e solamente in tale ipotesi) nella parte reale di una  $C^{mn}$  dotata di un solo nodo si può presentare il caso dell'incrocio <sup>(3)</sup>.

<sup>(2)</sup> I valori  $\alpha$  e  $\beta$  del testo sono ottenuti nei lav. cit. in <sup>(1)</sup> mediante la teoria dell'eliminazione: essi possono peraltro ritrovarsi utilizzando l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE di una superficie algebrica. Cfr. C. SEGRE, *Intorno ad un carattere delle superficie*, etc., « Atti Acc. Torino », 31 (1896), pp. 485-501. Per es. il numero  $\alpha$  può invero interpretarsi come numero delle superficie di un fascio di  $F^m$  che toccano una data  $F^n$ , cioè come numero dei punti del gruppo jacobiano di un fascio di  $C^{mn}$  (intersezioni complete) sulla  $F^n$ . Detto  $I$  l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE della  $F^n$ ,  $\sigma$  il numero dei punti-base e  $p$  il genere della curva corrente nel fascio di  $C^{mn}$  considerato, sussiste perciò la relazione di C. SEGRE

$$\alpha = \sigma + I + 4p.$$

Basta allora osservare che nelle attuali ipotesi

$$\sigma = nm^2, \quad p = \frac{1}{2}mn(m+n-4) + 1$$

ed anche (per es. utilizzando un fascio di sezioni piane)

$$I = (n-2) \{ (n-1)^2 + 1 \},$$

per ottenere un'espressione di  $\alpha$  facilmente riconducibile a quella del testo.

<sup>(3)</sup> Se ad es.  $m=1$ , le curve qui considerate sono le curve piane d'ordine  $n$ , il discriminante delle quali può sostituirsi al tactinvariante qui preso in esame. I risultati qui conseguiti costituiscono pertanto la naturale estensione alle curve gobbe intersezioni complete delle proprietà stabilite per le curve algebriche piane reali in L. BRUSOTTI, *Discriminanti e fasci nella topologia proiettiva del piano*, « Rend. Ist. Lomb. », 51 (1918), pp. 367-373.

Se poi si considera il tactinvariante  $T'$  di tre superficie algebriche generali  $F^{n_1}, F^{n_2}, F^{n_3}$  (o, se si vuole, del gruppo algebrico  $G$  delle  $N = n_1 n_2 n_3$  loro intersezioni), il cui annullarsi è condizione necessaria e sufficiente affinchè una delle tre superficie tocchi la intersezione delle altre due (o, come torna lo stesso, affinchè due degli  $N$  punti di  $G$  coincidano), si stabilisce immediatamente che i gradi di  $T'$  nei coefficienti delle tre superficie sono *sempre pari* <sup>(4)</sup>. Supponendo reali le superficie  $F^{n_1}, F^{n_2}, F^{n_3}$  e quindi anche il gruppo  $G$ , si ha pertanto che per un gruppo  $G$  privo di coincidenze ( $T' \neq 0$ ), il segno di  $T'$  è sempre essenziale. Ed è assai facile esprimere il significato topologico del segno di  $T'$ , coll'intervento del numero  $v$  dei punti reali di  $G$  (n. 5).

2. Siccome le superficie algebriche qui considerate sono supposte reali e prive di singolarità, la loro parte reale conterà di falde tutte pari se l'ordine della superficie è pari, tutte pari salvo una dispari, se l'ordine è dispari <sup>(5)</sup>.

E conviene anche esplicitamente ricordare:

a) *Le falde pari di una superficie generale reale di ordine dispari non possono contenere circuiti dispari* (che incontrerebbero la falda dispari dando luogo a singolarità per la superficie).

b) *Su una falda  $\Phi$  dispari (quindi unilatera) e priva di singolarità, un circuito  $\gamma$  è pari o risp. dispari secondo che sia unilatero*

<sup>(4)</sup> Invero per es. il grado di  $T'$  nei coefficienti di  $F^{n_1}$  è

$$\alpha_1 = n_2 n_3 (2n_1 + n_2 + n_3 - 4)$$

come può ottenersi mediante la teoria dell'eliminazione. Cfr. G. SALMON <sup>(4)</sup>, pag. 253. Ben s'intende che il numero  $\alpha_1$  può anche ottenersi quale numero (sempre pari) dei punti doppi di una  $g_N^1$  segnata da un fascio di  $F^{n_1}$  sulla curva intersezione completa di una  $F^{n_2}$  e di una  $F^{n_3}$  fisse, utilizzando il genere di tale curva; e più generalmente (cfr. anche <sup>(2)</sup>) come i gradi dei tactinvarianti di più ipersuperficie dello  $S_r$ , già ottenuti da HOLLICROFT <sup>(4)</sup>, si possano anche ottenere utilizzando l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE di una opportuna varietà algebrica (intersezione completa di ipersuperficie generali, genericamente poste).

<sup>(5)</sup> Cfr. ad es. L. BRUSOTTI, *Sull'ordine di connessione delle superficie algebriche reali*, « Rend. Ist. Lomb. », 78 (1944-45), pp. 360-366. In codesto lavoro si fornisce l'interpretazione topologica del segno del discriminante di una superficie algebrica generale reale, segno che è essenziale per qualunque ordine della superficie: si estendono cioè alle superficie algebriche i risultati richiamati in <sup>(3)</sup>.

o risp. *bilatero* (cioè inverte o non inverte la indicatrice); e *reciprocamente* <sup>(6)</sup>.

Perciò si ricordi dapprima che in un punto della falda  $\Phi$  la distinzione fra le due indicatrici della topologia intrinseca può associarsi alla distinzione *locale* delle due pagine della falda. Fissato quindi sul circuito  $\gamma$  di  $\Phi$ , un punto  $O$ , la si chiami punto  $O'$  o punto  $O''$  secondo che lo si pensi sull'una o sull'altra delle due pagine di  $\Phi$ , localmente distinte. Dopo di ciò un punto  $P$  descriva in un determinato verso  $\gamma$  a partire da  $O$  e ritornandovi, e supposto inizialmente  $P \equiv O'$ , si pensi ognora  $P$  posto sulla pagina che viene dedotta per continuità dalla pagina di  $O'$ . Descritto  $\gamma$  si avrà pertanto  $P \equiv O'$  oppure  $P \equiv O''$  secondochè  $\gamma$  sia bilatero o risp. unilatero su  $\Phi$ : ed in ogni caso sarà  $P \equiv O'$  quando per  $\gamma$  unilatero si faccia seguire al processo descritto lo scambio delle pagine in  $O$ . Assimilando allora lo scambio locale delle pagine come un attraversamento della falda, subito risulta che il circuito  $\gamma$  (pensato come luogo dei punti  $P$ ) non attraversa od attraversa una sola volta (nel punto  $O$ ) la falda  $\Phi$ , quando anche si tenga presente la supposta mancanza di singolarità per la  $\Phi$  stessa. E si ottiene così che a seconda che  $\gamma$  sia bilatero od unilatero, risulta pari, o risp. dispari.

La proposizione è poi immediatamente invertita.

**3.** Applicando convenientemente risultati di carattere generale <sup>(7)</sup>, è possibile stabilire la seguente proposizione:

*Un punto  $D$  doppio ordinario per una  $C^{mn}$ , priva di altre singolarità, intersezione completa di due superficie algebriche generali reali  $F^m$  ed  $F^n$  (che si toccano genericamente in  $D$ ), può essere un punto d'incrocio per la  $C^{mn}$  se e solo se  $m$  ed  $n$  hanno diversa parità.*

Intanto i circuiti  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  della  $C^{mn}$  che danno luogo all'incrocio  $D$

<sup>(6)</sup> Questa proposizione, che estende una risaputa proprietà del piano proiettivo, è da ritenersi nota. Non mi consta però che ricorra esplicitamente altrove; credo perciò opportuno esporne qui una dimostrazione elementare. Per una falda  $\Phi$  che sia l'unica falda di una superficie razionale reale di ordine dispari, sotto opportune condizioni, una dimostrazione aritmetica della proposizione trovasi in A. COMESSATTI, *Sui circuiti dispari delle curve algebriche reali tracciate sopra superficie razionali reali*, questo « Boll. », (1) 12 (1933), pp. 289-293.

<sup>(7)</sup> Cfr., anche per la nomenclatura alla quale ci atterremo, la recente Memoria di L. BRUSOTTI, *Premesse topologiche allo studio dei fasci reali di curve algebriche reali sopra una superficie algebrica reale*, « Ann. di Mat. » (4) 25 (1946), pp. 67-109.

debbono giacere sopra una stessa falda di  $F^m$  (e su una stessa falda di  $F^n$ ), chè diversamente  $F^m$  (od  $F^n$ ) avrebbe in  $D$  una singolarità.

Se allora, *per m ed n entrambi pari*, la  $C^{mn}$  presentasse l'incrocio,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  starebbero su una stessa falda  $\Phi$  di  $F^m$ . Introdotto una generica superficie  $\bar{F}^n$  algebrica reale ma priva di parte reale, si consideri il fascio individuato da  $F^n$  ed  $\bar{F}^n$ , ed il fascio di curve grafiche che viene così segnato sulla  $\Phi$ . Per la genericità algebrica si può affermare che il fascio di curve grafiche è topologicamente generico: di più privo di punti-base, per essere  $\bar{F}^n$  priva di parte reale. Per il fascio di curve grafiche la coppia di circuiti  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  dovrebbe essere una coppia estremo, e come tale contata una volta chè diversamente la  $C^{mn}$  sarebbe dotata di una componente doppia. Ma ciò importerebbe che  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  avessero carattere unilatero su  $\Phi$ , e ciò è assurdo in quanto  $\Phi$  come falda pari priva di singolarità è bilatera <sup>(8)</sup>.

*Siano ora m ed n entrambi dispari.* Detti sempre  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  i circuiti di  $C^{mn}$  formanti l'incrocio, supposto — se possibile — esistente, e  $\Phi$  la falda di  $F^m$  sulla quale giacciono, si introduca come  $\bar{F}^n$  una superficie algebrica reale genericamente prossima ad una superficie reale spezzata in un piano ed in una componente residua priva di punti reali: con ciò  $\bar{F}^n$  sarà dotata di una sola falda (dispari)  $\Psi$ .

Se  $\Phi$  è pari, è anche bilatera, e bilateri saranno pertanto  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ : allora per fornire al fascio di curve grafiche che al solito modo viene introdotto su  $\Phi$  una coppia estremo nelle condizioni volute (in modo cioè che  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  si comportino come circuiti unilateri in assenza di punti-base)  $\gamma_1$  (o  $\gamma_2$ ) deve contenere un numero dispari di punti-base, ossia deve essere dispari il numero delle intersezioni di  $\gamma_1$  (o  $\gamma_2$ ) colla falda  $\Psi$  della  $\bar{F}^n$ . I circuiti  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  dovrebbero cioè essere dispari, ma ciò è assurdo per a) di numero precedente.

Si giunge ad un assurdo anche supponendo  $\Phi$  dispari: invero se per es.  $\gamma_1$  fosse unilatero dovrebbe possedere un numero pari di punti base, ed essere perciò pari (perchè  $\Psi$  è dispari), e ciò è assurdo per b) di num. prec.

*Se infine m ed n hanno parità diversa:* per es.  $m$  è pari ed  $n$  dispari, si trova che  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  come circuiti della falda (pari)  $\Phi$  di  $F^m$  sono bilateri, e, dovendo perciò contenere un numero dispari di punti-base, sono dispari, epperò (cfr. b) di n. 2) debbono stare sulla falda dispari di  $F^n$ . Insomma se si presenta l'incrocio esso è determinato da due circuiti dispari, situati sulla falda dispari della superficie d'ordine dispari, e su tale falda unilateri (sono invece

<sup>(8)</sup> Per quanto sopra, cfr. L. BRUSOTTI <sup>(7)</sup>, specie i n. 1, 2, 3, 4, 9, 16.

bilateri per una stessa falda pari della superficie d'ordine pari). Ma se gli ordini  $m$  ed  $n$  hanno parità diversa *l'incrocio si può effettivamente presentare*. Basta invero rilevare che un fascio reale (algebricamente generico) di superficie d'ordine pari, segna sulla falda dispari (d'ordine di connessione dispari) di una superficie d'ordine dispari un fascio (topologicamente generico) di curve grafiche, che per avere un numero pari di punti-base, possiede un numero dispari di incroci, epperò almeno uno <sup>(9)</sup>.

4. Per  $m$  ed  $n$  di ugual parità si introduca ora una curva  $H^{mn}$ , intersezione completa di due superficie algebriche generali reali  $G^m$  e  $G^n$  genericamente poste, e dotata di un sol circuito. Ciò è senza dubbio possibile: per es. se  $m$  ed  $n$  sono dispari introducendo due superficie ognuna spezzata in un piano ed in una componente residua priva di punti reali e sottoponendo le due superficie a piccola variazione; se  $m$  ed  $n$  sono pari introducendo due superficie ognuna spezzata in una quadrica ed in una componente residua priva di punti reali, in modo che le due quadriche si intersechino in una quartica ad un sol circuito, indi etc.

Si normalizzi quindi il tactinvariante  $T$ , disponendo del fattore numerico a meno del quale è dato, in modo che calcolato per  $H^{mn}$  ( $T \neq 0$ ), risulti negativo.

Dopo di ciò data una  $C^{mn}$  con  $T \neq 0$ , si passi dalla  $H^{mn}$  alla  $C^{mn}$  percorrendo da  $G^m$  ad  $F^n$  uno dei due continui (reali) delle superficie reali del fascio individuato da  $G^m$  ed  $F^n$ , e successivamente percorrendo uno dei due continui delle superficie reali del fascio individuato da  $G^n$  ed  $F^m$ , e si osservi che attesa la genericità dei fasci le eventuali singolarità per la curva intersezione saranno punti doppi ordinari, e si presenteranno separatamente.

Il numero dei circuiti della curva intersezione si conserverà, solo variando di una (sola) unità ogni volta che si attraversi una posizione dotata di punto doppio, in quanto (n. 3) esso sarà un intreccio od un punto isolato, ed il passaggio attraverso ad una curva dotata di una (sola) siffatta singolarità altera notoriamente e di una sola unità il numero dei circuiti <sup>(10)</sup>. Ma in tale attraversamento il tactinvariante  $T$  cambia di segno, onde ad ogni cambiamento del segno di  $T$ , si associa un cambiamento di parità per il numero dei circuiti, e si può quindi concludere:

<sup>(9)</sup> Cfr. L. BRUSOTTI <sup>(7)</sup>, n. 17.

<sup>(10)</sup> Ciò invero capita per un fascio di curve grafiche del piano proiettivo, cfr. L. BRUSOTTI <sup>(3)</sup>, e la proprietà si estende immediatamente ad un fascio di curve grafiche sopra una falda reale, cfr. L. BRUSOTTI <sup>(7)</sup>.

*Il numero dei circuiti di una  $C^{mn}$  priva di singolarità, intersezione completa di due superficie generali reali di ordini  $m$  ed  $n$  aventi la stessa parità, è pari o dispari secondo che il tactinvariante, debitamente normalizzato, sia positivo o negativo.*

Un analogo criterio non può invece affidarsi al segno del tactinvariante  $T$  quando  $m$  ed  $n$  abbiano parità diversa, in quanto (n. 1) tale segno è allora inessenziale. E questa circostanza trova la spiegazione topologica nella possibilità dell'intervento dei punti d'incrocio e nel fatto che attraversando una curva dotata d'incrocio, mentre si altera il segno di  $T$ , non si altera il numero dei circuiti <sup>(11)</sup>.

5. Si passi ora a considerare il tactinvariante  $T'$  di un gruppo  $G$  algebrico reale di  $N$  punti, per completare quanto in proposito si disse al n. 1, e che si intende con ciò richiamato.

Perciò si *normalizzi*  $T'$  in modo che per un gruppo  $G_0$  privo di punti reali se  $N$  è pari e dotato di un sol punto reale se  $N$  è dispari, e per il resto generico ( $T' \neq 0$ ), risulti  $T' > 0$ .

Allora subito si ravvisa che è:

$$v \equiv \varepsilon \pmod{4}$$

in conformità al prospetto

|             | $T' > 0$          | $T' < 0$          |
|-------------|-------------------|-------------------|
| $N$ pari    | $\varepsilon = 0$ | $\varepsilon = 2$ |
| $N$ dispari | $\varepsilon = 1$ | $\varepsilon = 3$ |

Basta invero osservare che, per qualunque  $N$ , è possibile procurarsi gruppi  $G_0$ , e che quando un gruppo  $G$  attraversa (genericamente) una posizione dotata di coincidenza, muta il segno di  $T'$  e di due unità il numero  $v$ .

Un risultato del tutto analogo si può immediatamente stabilire in relazione al gruppo algebrico degli  $N = n_1 \cdot n_2$  punti di intersezione di due curve algebriche piane reali degli ordini  $n_1$  e risp.  $n_2$  (risultato che peraltro può dedursi da quello sopra esposto facendo  $n_3 = 1$ ), e se si vuole in relazione al discriminante <sup>(12)</sup> del gruppo (algebrico) reale di  $N$  punti di una retta (che può anche dedursi da quello sopra esposto per  $n_2 = n_3 = 1$ ,  $n_1 = N$ ).

<sup>(11)</sup> Cfr. <sup>(10)</sup>.

<sup>(12)</sup> Per tactinvariante di una sola forma si intende solitamente il discriminante della forma stessa. Cfr. per es. HOLLICROFT <sup>(1)</sup> e <sup>(3)</sup>.



*Osservazione.* I già richiamati risultati del prof. BRUSOTTI <sup>(13)</sup> e quelli del presente Lavoro esauriscono la questione dell'interpretazione topologica del segno dei tactinvarianti che si possono considerare in relazione a  $\mu$  forme reali del piano ( $\mu = 1, 2$ ) e dello spazio ordinario ( $\mu = 1, 2, 3$ ) o se si vuole in relazione alle varietà algebriche reali  $V_h$  ( $h = r - \mu$ ) « intersezioni complete » dello  $S_r$ , per  $r = 2, 3$ .

Quanto sopra è naturalmente da intendersi nel senso che si fornisce l'interpretazione topologica del segno del tactinvariante quando tale segno sia essenziale, e quando invece il segno sia inessenziale si stabilisce la circostanza topologica a cui ciò risponde.

Sulle possibili estensioni iperspaziali non intendo qui soffermarmi <sup>(14)</sup>.