
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

M. BARTOLO

Il problema di Delo ed una sua applicazione acustica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 2
(1947), n.3, p. 235–238.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_3_235_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_3_235_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Il problema di Delo ed una sua applicazione acustica.

Nota di M. BARTOLO (a Roma).

Sunto. - Si dà una semplice costruzione geometrica della $\sqrt[3]{2}$, approssimata a meno di un decimillesimo, che si applica alla costruzione della scala semitonata di alcuni strumenti musicali a corda.

Scopo della presente Nota è di dare una soluzione molto semplice del problema della duplicazione del cubo, problema ancora interessante per l'applicazione che trova nella costruzione di moderni strumenti musicali.

1. Essendo s lo spigolo di un cubo ed s_1 quello di un altro cubo di volume doppio, dall'essere $s_1^3 = 2s^3$ segue $s_1 = s\sqrt[3]{2}$. L'espressione $s\sqrt[3]{2}$ non può che costruirsi con approssimazione mediante

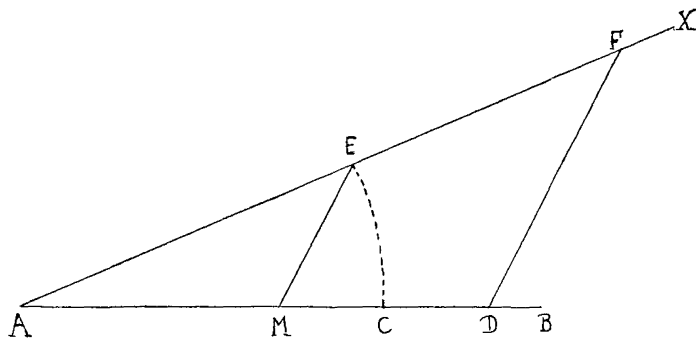


Fig. 1.

riga e compasso. La seguente costruzione è assai semplice e dà un risultato molto approssimato.

Dato un segmento $s = AB$ sia M il suo punto medio. Diviso MB in cinque parti eguali (fig. 1), si tiri la retta arbitraria AX e si faccia su essa $AE = AC$, dove C è il secondo punto di divisione dopo M . Unito M con E , si tiri da D , quarto punto di divisione, la parallela DF ad ME ; sarà $AF = s\sqrt[3]{2}$ con errore inferiore ad un decimillesimo di s .

Infatti si ha: $AM = \frac{5}{10}s$, $AC = AE = \frac{7}{10}s$, $AD = \frac{9}{10}s$, e poichè si ha:

$$AM : AE = AD : AF, \quad \text{cioè:} \quad \frac{5}{10}s : \frac{7}{10}s = \frac{9}{10}s : AF,$$

ne segue:

$$AF = \frac{0,7 \searrow 0,9}{0,5}s = s \times 1,26.$$

Poichè $\sqrt[3]{2} = 1,259921\dots$ l'errore è minore di un decimillesimo di s .

Vale a dire che per un segmento s eguale ad esempio ad un metro, l'errore sarebbe inferiore al decimo di millimetro.

Il cubo avente per spigolo AF si può quindi considerare doppio di quello di spigolo $s = AB$.

2. La costruzione di $s\sqrt[3]{2}$ sopra indicata, trova oggi una notevole applicazione nella costruzione di alcuni strumenti a corda che hanno il manico diviso da fascette metalliche, dette tasti, in modo che, abbassando fra esse le dita, si ottiene la scala temperata, cioè la scala semitonata con intervalli di semitono tutti uguali. È noto che questo intervallo di semitono è allora rappresentato da $\sqrt[12]{2} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2}}$, e che partendo da un dato suono, per esempio da un *do* e andando all'ottava superiore, si ha, per la scala temperata, la seguente successione d'intervalli, riferiti sempre al *do* fondamentale:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & \sqrt[12]{2}, & \sqrt[12]{2^2}, & \sqrt[12]{2^3}, & \sqrt[12]{2^4}, & \dots & \sqrt[12]{2^{11}}, & \sqrt[12]{2^{12}} = 2. \\ \text{do} & \text{do}_+ & \text{re} & \text{re}_+ & \text{mi} & & \text{si} & \text{do} \end{array}$$

È noto altresì che variando la lunghezza di una corda sonora, il numero di vibrazioni che essa può compiere in un dato tempo varia in ragione inversa della lunghezza; pertanto, per avere la scala semitonata temperata bisogna, mediante i tasti metallici suddetti, far variare la lunghezza della corda secondo la progressione

geometrica:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{\sqrt[12]{2}}, \frac{1}{\sqrt[12]{2^2}}, \frac{1}{\sqrt[12]{2^3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[12]{2^{11}}}, \frac{1}{\sqrt[12]{2^{12}}} = \frac{1}{2}.$$

Rendendo razionali i denominatori si ha:

$$\frac{1}{1}, \frac{\sqrt[12]{2^{11}}}{2}, \frac{\sqrt[12]{2^{10}}}{2}, \frac{\sqrt[12]{2^9}}{2}, \dots, \frac{\sqrt[12]{2}}{2}, \frac{1}{2}.$$

Scrivendo tutti i termini della progressione in senso contrario, si ottiene la progressione di ragione $\sqrt[12]{2}$ seguente:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \sqrt[12]{2}, \frac{1}{2} \sqrt[12]{2^2}, \dots, \frac{1}{2} \sqrt[12]{2^{11}}, 1,$$

che dà le lunghezze che deve assumere la corda mediante i tasti metallici per dare la scala semitonata discendente.

Sapendo costruire il segmento $s \sqrt[3]{2}$, si può costruire facilmente il segmento $s \sqrt[12]{2}$, e ciò nel modo seguente:

Fatto, sulla retta r , $AB = s$ e $AF = s \sqrt[3]{2}$ (v. n. 1), si trovi, (fig. 2) il segmento medio geometrico fra AB e AF e sia esso $AC = AD$, dove C è l'intersezione della semicirconfenza di diametro AF e

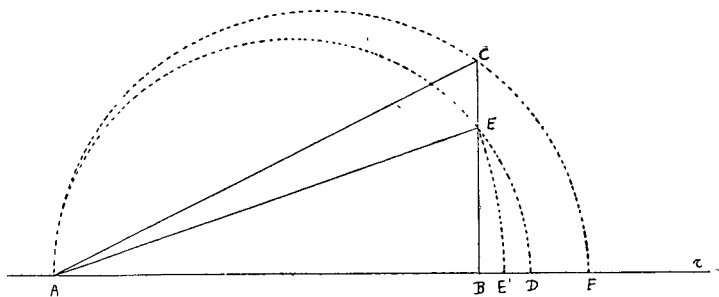


Fig. 2.

la normale al diametro condotta da B , e D un punto della retta r ; indi si trovi il segmento medio geometrico fra AB e AD e sia esso $AE' = AE'$, dove E è l'intersezione della semicirconfenza di diametro AD e la normale al diametro condotta pure da B , e E' un punto della retta r . Dico che $AE' = s \sqrt[12]{2}$.

Infatti si ha:

$$AD = \sqrt{AB \times AF} = \sqrt{s \times s \sqrt[3]{2}} = s \sqrt[6]{2}$$

$$AE' = \sqrt{AB \times AD} = \sqrt{s \times s \sqrt[6]{2}} = s \sqrt[12]{2}.$$

Se ora il segmento AB rappresenta la metà della lunghezza della corda sonora AP (fig. 3) per avere tutte le posizioni dei tasti metallici da porre fra B e P onde ottenere la scala semitonata discendente, si osservi che E' , D e F sono il 1°, il 2° e il 4° punto dopo B per i quali debbono passare i tasti. Per avere il 3° punto,

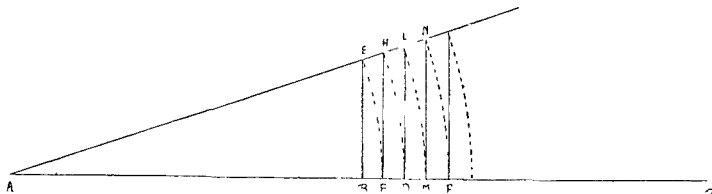


Fig. 3.

basta innalzare dal punto D la normale ad AP fino ad incontrare il prolungamento della AE in L e portare AL in AM sopra AP . Il punto M è il richiesto.

La normale MN ad AP individua un segmento AN che dovrà risultare uguale ad AF . Continuando la costruzione precedente si ottengono tutti i punti di divisione successivi ad F fino a P , che deve essere il 12° punto dopo B .

3. La costruzione sopra indicata, mentre raggiunge una approssimazione notevolissima, è tuttavia poco adatta per i costruttori di strumenti. Si consiglia la seguente che è semplicissima. Sopra una semiretta AX si porti un segmento $AB = \text{cm. } 20$ e perpendicolarmente ad esso un segmento $BC = \text{cm. } 7$. Sarà allora $AC = AB \sqrt[12]{2}$ con errore inferiore al decimo di millimetro.

Infatti si ha:

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{AB^2 + \left(\frac{7}{20} AB\right)^2} = AB \sqrt{1 + \left(\frac{7}{20}\right)^2} = \\ &= AB \sqrt{1 + (0,35)^2} = AB \sqrt{1,1225} = AB \times 1,0594. \end{aligned}$$

Or essendo $\sqrt[12]{2} = 1,0593$, ne segue che l'errore è di circa un decimillesimo di AB ; e poichè $AB = \text{cm. } 20 = \text{m. } \frac{1}{5}$, ne segue che l'errore è di circa un cinquantesimo di millimetro.

Stabilito il triangolo ABC , la divisione di AB , sia verso destra che verso sinistra si fa nel modo visto al n. precedente.