Bollettino Unione Matematica Italiana

Adele Federici

Un’osservazione sul teorema di Schottky-Bieberbach-Montel

Bollettino dell’Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.3, p. 231–234.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_3_231_0>

L’utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l’utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1947.

Un' osservazione sul teorema di Schottky-Bieberbach-Montel.

Nota di ADELE FEDERICI (a Milano).

Sunto. - *È identico alle prime quattro righe della Nota.*

1. La presente Nota è destinata a un' osservazione riguardante il teorema di SCHOTTKY-BIEBERBACH-MONTEL, col quale si maggiora il modulo di una funzione analitica regolare in un cerchio ove essa non assuma determinati valori.

Cominciamo col ricordare il *teorema di Schottky*: [1]

[1] F. SCHOTTKY, *Ueber den Picardschen Satz und die Borelschen Ungleichungen*, « Sitzungsberichte Akad. », Berlin, 1904, pp. 1244-1262.

« Se $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$ è una funzione regolare per $|z| < 1$
« diversa da 0 e da 1, esiste un limite $S(a_0, \vartheta)$ tale che, per
« $|z| \leq \vartheta \cdot (0 < \vartheta < 1)$ è:

$$|f(z)| \leq S(a_0, \vartheta) \text{ ».}$$

Un'effettiva espressione della funzione $S(a_0, \vartheta)$ fu quella ottenuta da C. CARATHEODORY (1905) [2]:

$$|f(z)| < e^{\Delta \frac{\log [|a_0|+2]}{1-\vartheta}}$$

dove Δ è numero indipendente da a_0, ϑ, $a_1, \ldots$.

Altre valutazioni furono stabilite da H. BOHR–E. LANDAU (1910), G. VALIRON (1927), A. OSTROWZKY (1931), A. PFLUGER (1934) e L. V. AHLFORS (1938) [3].

Quest'ultima ci dà: [4]

$$|f(z)| < e^{\frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}(7 + \overset{+}{\log} |f(0)|)} \qquad |z| < \vartheta < 1.$$

L. BIEBERBACH e P. MONTEL hanno generalizzato questo teorema estendendo la considerazione alle funzioni che assumono un numero limitato di volte i valori 0 e 1 [5] e dimostrando il teorema seguente:

« Sia $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$ una funzione regolare olomorfa nel
« cerchio $|z| < 1$, nel quale non assuma più di p volte il valore 0,
« nè più di q volte il valore 1, $(p \leq q)$. Siano $k_0, k_1, \ldots, k_p$, $p+1$
« numeri reali positivi qualunque, e i coefficienti a_i tali che:

$$|a_i| \leq k_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, p).$$

« Sia $0 < \vartheta < 1$. Esiste un limite S, dipendente soltanto da k_i, ϑ,
« tale che, per $|z| \leq \vartheta$ vale la limitazione:

$$|f(z)| \leq S_{p,q}(k_0, k_1, \ldots, k_p, \vartheta) \text{ ».}$$

(2) C. CARATHÉODORY, *Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard*, « C. R. de l'Acad. des Sciences », T. 141 (1905). p. 1213.

(3) L. V. AHLFORS, *An extension of Schwarz's lemma*, « Americ. Math. Soc. », 43 (1938), pp. 359-364.

(4) Per x reale, $\overset{+}{\log} x$ significa $\log x$ quando è $x \geq 1$, mentre significa lo zero quando è $0 < x < 1$.

(5) L. BIEBERBACH, *Ueber die Verteilung der Null und Einstellen analytischen Functionen*, « Math. Ann. », 85 (1922), pp. 141-148.

P. MONTEL, *Sur les familles quasi normales des fonctions holomorphes*, « Mem. de l'Acad. Roy. de Bélgique », classe des Sciences, T. 6 (1922), pp. 1-41.

P. MONTEL, *Léçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, Coll. Borel, 1927, pp. 69-74, 88-92.

2. Partendo dalla disuguaglianza di L. V. Ahlfors e applicando un procedimento di P. Lévy [6], otteniamo una valutazione concreta del limite $S_{0,q}(k_0, \vartheta)$ di Bieberbach–Montel e precisamente:

$$|f(z)| < e^{\frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}C} \qquad \text{per } |z| < \vartheta < 1$$

dove $C = 7(q+1)\overset{+}{\log}|f(0)|$.

Infatti la funzione $\sqrt[q+1]{f(z)}$ ha, nel cerchio unitario, $q+1$ rami che formano ivi una funzione regolare. In un punto z_0 ove $f(z_0) = 1$, soltanto uno di questi rami assume il valore 1, quindi dei $q+1$ rami ne esiste almeno uno che non assume nè il valore 0 nè il valore 1. Se questo ramo lo indichiamo con $\varphi(z)$ abbiamo per la valutazione di Ahlfors:

$$(*) \qquad |\varphi(z)| < e^{\frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}(7 + \overset{+}{\log}|\varphi(0)|)}$$

e poichè in ogni caso $\overset{+}{\log}|f(0)| = (q+1)\overset{+}{\log}|\varphi(0)|$, ne segue la limitazione enunciata.

3. Ci possiamo domandare se sussisterà una limitazione come la (*), valida uniformemente rispetto a q, cioè se esisterà una funzione $S_{0,q}(k_0, \vartheta)$ indipendente da q. C'è da aspettarsi che questo non sia, ma in ogni caso sorge la questione di vedere in quale modo il parametro q entra in $S_{0,q}$ e quale sia l'ordine più favorevole.

A queste domande risponde la proposizione seguente:

« *Ogni limitazione di Schottky–Bieberbach–Montel della forma*:

$$|f(z)| < e^{A(\vartheta, q) + \overset{+}{\log}|f(0)|} \qquad (\text{per } |z| < \vartheta < 1)$$

« *valida per tutte le funzioni* f(z) *che per* $|z| < 1$ *sono regolari,*
« *non si annullano e assumono il valore* 1 *al più* q *volte, deve*
« *avere necessariamente*:

$$A(\vartheta, q) \geqq \pi(q+1)\vartheta \text{ ».}$$

Questa proposizione unita a quella precedente, ricavata dalla limitazione di Ahlfors, ci consente di assegnare alla funzione $A(\vartheta, q)$ l'intervallo di indeterminazione:

$$\pi(q+1) \leqq A(\vartheta, q) < \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}\, 7(q+1).$$

[6] Ved. A. Ostrowski, *Studien ueber den Schottkyschen Satz*, Basel, 1931, p. 20.

Si vede quindi che $A(\vartheta, q)$ è del primo ordine rispetto a q.

Per dimostrare la proposizione basta segnalare un esempio elementare.

Consideriamo la funzione:

$$f(z) = e^{2(h+1-\varepsilon)\pi z} \qquad (h \text{ intero positivo, } 0 < \varepsilon < 1)$$

per la quale $|f(0)| = 1$ e che assume il valore 1 soltanto nei punti ove $2(h+1-\varepsilon)\pi z = 2n\pi i$ (n intero) cioè:

$$z = \frac{h+1-\varepsilon}{n} i$$

e quindi entro il cerchio $|z| < 1$ in tutti e soli i punti $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm h$, $(q = 2h+1)$.

Essendo

$$|f(z)| = e^{2(h+1-\varepsilon)\pi x} \qquad (z = x + iy)$$

si vede che per $|z| < \vartheta$ il massimo modulo viene assunto nel punto $x = \vartheta$ e questo massimo è:

$$e^{(q+1-2\varepsilon)\pi\vartheta}$$

pertanto, essendo ε positivo arbitrariamente piccolo, la funzione $A(\vartheta, q)$ per il complesso delle funzioni $f(z)$ della forma $a_0 e^{\gamma z}$, risulta $(q+1)\pi\vartheta$ e da questo segue l'asserto.