Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Castoldi

I «movimenti astratti» di Appell e un nuovo esempio di vincoli anolonomi non lineari nelle velocità

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.3, p. 221–228.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_3_221_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1947.

I « movimenti astratti » di Appell e un nuovo esempio di vincoli anolonomi non lineari nelle velocità.

Nota di LUIGI CASTOLDI (a Genova).

Sunto. - *Si rileva l'opportunità di fornire nuovi procedimenti, oltre quello indicato dall'* APPELL, *per la realizzazione di vincoli del tipo in questione e si dà un esempio in tal senso.*

1. Sono dovuti all'APPELL (¹) alcuni esempi di vincoli anolonomi non lineari nelle velocità e l'indicazione di un procedimento per la loro realizzazione materiale cui il DELASSUS (²) ha attribuito il nome di « *procedimento di Appell* » o dei « *vincoli astratti* ».

Il concetto che sta a base di tale procedimento è espresso brevemente dalle seguenti parole che traduciamo testualmente dall'APPELL (³): « HERTZ ha mostrato nella sua Meccanica che i vin-

(¹¹) Cfr. VILLA, op. cit. nella (¹), Nota I, n. 2.

(¹) P. APPELL, *Exemple de mouvement d'un point assujetti a une liaison exprimée par une relation non linéaire entre les composantes de la vitesse.* « Rend Circolo mat. di Palermo », t. XXXII, 2° sem. 1911, p. 48 E anche: *Sur les liaisons non linéaires par rapport aux vitesses.* « Rend. Circolo mat. di Palermo », t. XXXIII, 1° sem. 1912, p. 259.

(²) E. DELASSUS, *Sur les liaisons et les mouvements.* « Annales de l'Ecole normale », t. XXIV (1012), p. 303.

(³) P. APPELL, *Sur une forme générale des équations de la dynamique.* « Memorial des Sciences math. », fasc. I, p. 37.

coli si esprimono per mezzo di relazioni lineari. Ma può accadere che, al tendere a zero di certe masse o di certe grandezze geometriche, un insieme di vincoli lineari fornisca al limite un legame non lineare imposto a un punto di un sistema ».

Il procedimento in questione dà luogo, com'è noto, a qualche difficoltà all'atto del passaggio al limite per le masse e lunghezze indicate, giacchè, a seconda del modo di far tendere a zero le une e le altre si può pervenire a risultati diversi. Tutto ciò è stato rilevato e chiarito dagli stessi Autori citati.

Ci sembra tuttavia non inutile far notare una difficoltà che tuttora permane nel procedimento di APPELL e che, essendo connaturata collo spirito del procedimento stesso, non appare facilmente superabile.

Trarremo argomento da questo rilievo per indicare su un esempio un modo diretto di realizzazione di vincoli anolonomi non lineari; il che costituisce lo scopo essenziale della presente Nota.

2. Ci riferiamo, per fissare le idee, a uno degli esempi trattati particolarmente dall'APPELL. Si tratta di realizzare materialmente il vincolo

$$k^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \dot{z}^2 \tag{1}$$

imposto ad un punto M di massa m e di coordinate cartesiane ortogonali x, y, z. Nella seconda delle note citate l'Autore immagina il seguente dispositivo: Il punto M viene collegato all'estremità superiore di un'asta A mantenuta verticale da un apposito supporto. Questo permette all'asta scorrimenti verticali ed è a sua volta scorrevole senza attrito sul piano orizzontale xy. Al supporto dell'asta è pure collegata una ruota ad asse orizzontale e poggiante con un bordo tagliente sul piano xy. Essa ha così la possibilità di rotolare ma non di strisciare sul piano d'appoggio. Il piano verticale della ruota passa costantemente per l'asta A. Un congegno facilmente immaginabile determina, per ogni rotazione effettuata dalla ruota, un proporzionale sollevamento (o abbassamento a seconda del verso di rotazione) dell'asta A.

Le equazioni del moto di M vengono stabilite dall'APPELL in base alla nota proprietà di minimo dell'energia di accelerazione del sistema. Noi, qui, per uniformità con quanto dovremo aggiungere in seguito, preferiamo ricorrere ad equazioni di tipo lagrangiano nella forma che esse assumono allorchè si è in presenza di vincoli di mobilità.

Il sistema descritto è dotato di quattro gradi di libertà. Come parametri lagrangiani possono assumersi: le coordinate ξ ed η del punto d'appoggio H della ruota sul piano xy; l'angolo ϑ che la tangente alla ruota nel punto d'appoggio orientata nel senso del moto forma coll'asse x; l'angolo φ caratterizzante la posizione della ruota attorno al proprio asse. Indicata poi con ρ la distanza fissa tra H e il piede P sul piano xy della verticale di M e con b una costante caratteristica del congegno collegante la ruota coll'asta A, le coordinate x, y, z del punto M sono legate ai parametri testè elencati dalle relazioni in termini finiti

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \xi + \rho \cos \vartheta \\ y = \eta + \rho \operatorname{sen} \vartheta \\ z = b\varphi. \end{cases}$$

Indicando con a il raggio della ruota sussistono poi tra i parametri del sistema le due relazioni non integrabili

$$(3) \qquad \begin{aligned} d\xi &= a \cos \vartheta d\varphi \\ d\eta &= a \operatorname{sen} \vartheta d\varphi \end{aligned} \qquad \text{ossia} \qquad (3') \begin{cases} \dot{\xi} = a \cos \vartheta \dot{\varphi} \\ \dot{\eta} = a \operatorname{sen} \vartheta \dot{\varphi} \end{cases}$$

rappresentanti due vincoli lineari di mobilità.

Indicando con μ la massa e con $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ rispettivamente i momenti d'inerzia diametrale e assiale della ruota, indi trascurando le masse e i momenti d'inerzia dei supporti, l'energia cinetica T del sistema assume facilmente la forma seguente

$$(4) \qquad 2T = (m + \mu)(\dot{\xi}^2 + \dot{\mu}^2) + (\mathfrak{B} + mb^2)\dot{\varphi}^2 + (m\rho^2 + \mathfrak{A})\dot{\vartheta}^2.$$

Se X, Y, Z sono le componenti cartesiane della forza agente su M, le analoghe componenti lagrangiane si ottengono osservando che l'espressione del più generale spostamento virtuale concesso dai vincoli al punto M è, in virtù di (2):

$$(2') \qquad \delta x = \delta\xi - \rho \operatorname{sen} \vartheta\delta\vartheta; \quad \delta y = \delta\eta + \rho \cos \vartheta\delta\vartheta; \quad \delta z = b\delta\varphi,$$

onde l'espressione del corrispondente lavoro della forza agente su M è

$$\delta L = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = X\delta\xi + Y\delta\eta + (-X\rho \operatorname{sen} \vartheta + Y\rho \cos \vartheta)\delta\vartheta + bZ\delta\varphi.$$

Le equazioni lagrangiane del moto del sistema, tenendo conto dei vincoli (3) col noto metodo dei moltiplicatori, sono quindi:

$$(5) \qquad \begin{cases} (m + \mu)\ddot{\xi} = X + \lambda \\ (m + \mu)\ddot{\eta} = Y + \tau \\ (m\rho^2 + \mathfrak{A})\ddot{\vartheta} = -X\rho \operatorname{sen} \vartheta + Y\rho \cos \vartheta \\ (\mathfrak{B} + mb^2)\ddot{\varphi} = bZ - \lambda a \cos \vartheta - \tau a \operatorname{sen} \vartheta. \end{cases}$$

Queste, unitamente alle (3') e ad assegnate condizioni iniziali, determinano univocamente in funzione del tempo i parametri ξ, η, ϑ, φ e i moltiplicatori λ e μ.

È possibile anche eliminare le quantità λ, τ, ξ ed η tra le (5) e (3′) pervenendo così a due sole equazioni nei due soli parametri φ e ϑ. Si ha infatti dapprima

$$\lambda = (m + \mu)\ddot{\xi} - X; \qquad \tau = (m + \mu)\ddot{\eta} - Y,$$

indi, derivando le (3′):

$$\ddot{\xi} = a \cos \vartheta \ddot{\varphi} - a \operatorname{sen} \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi}; \qquad \ddot{\eta} = a \operatorname{sen} \vartheta \ddot{\varphi} + a \cos \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi},$$

le quali, sostituite nelle ultime due delle (5) dànno le equazioni cercate:

$$(6) \qquad \begin{cases} (ma^2 + mb^2 + \mu b^2 + \mathcal{B})\ddot{\varphi} = Xa \cos \vartheta + Ya \operatorname{sen} \vartheta + Zb \\ (m\rho^2 + \mathcal{A})\ddot{\vartheta} = - X\rho \operatorname{sen} \vartheta + Y\rho \cos \vartheta. \end{cases}$$

A queste si sarebbe potuto del resto giungere direttamente applicando al sistema in istudio le equazioni del MAGGI.

3. Immaginiamo ora, seguendo l'APPELL, di poter ritenere trascurabile l'inerzia del sistema descritto mantenendogli esclusivamente le proprietà geometriche atte a realizzare i vincoli (2) e (3) per il punto M. Dovremo porre allora $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mu = 0$ nelle (6), dopo di che esse assumono la forma:

$$(6') \qquad \begin{cases} m(a^2 + b^2)\ddot{\varphi} - a(X \cos \vartheta + Y \operatorname{sen} \vartheta) + Zb \\ (m\rho^2\ddot{\vartheta} = - X\rho \operatorname{sen} \vartheta + Y\rho \cos \vartheta. \end{cases}$$

Con ciò non si fa del resto che applicare al caso presente lo stesso procedimento di astrazione secondo cui, per es., avendo realizzato un pendolo mediante un'asta rigida materiale, si suppongono poi trascurabili la massa e il momento d'inerzia dell'asta stessa.

Se oltre a ciò supponiamo $\rho = 0$, il che equivale a disporre l'asta verticale in modo che il suo prolungamento passi per H, la prima dells (6′) rimane inalterata,

$$(7) \qquad m(a^2 + b^2)\ddot{\varphi} = a(X \cos \vartheta + Y \operatorname{sen} \vartheta) + Zb,$$

mentre la seconda si riduce ad una identità.

Contemporaneamente, dalle (2), (3), segue in questa ipotesi

$$(8) \qquad \begin{cases} \dot{x} = a \cos \vartheta \dot{\varphi} \\ \dot{y} = a \operatorname{sen} \vartheta \dot{\varphi} \\ \dot{z} = b \dot{\varphi} \end{cases}$$

da cui, scelti a e b in modo che risulti $\frac{b}{a} = k$, scende

$$k^2(x^2 + y^2) = z^2.$$

Ma non si creda di aver realizzato così il vincolo (1) per il punto M.

Per rendersene conto si osservi che mentre, per la (1), i possibili atti di moto del punto M sono quei medesimi che gli competerebbero qualora esso fosse costretto a mantenersi sulla superficie di un cono ad asse verticale di ampiezza arccotg k del quale si trovasse istante per istante nel vertice, le (8) consentono invece soltanto al punto M di muoversi sull'intersezione del detto cono col piano passante per l'asse e formante un angolo ϑ col piano xz.

In secondo luogo si noti che le equazioni del moto del punto M, in quanto soggetto all'effettivo vincolo (1), sono

$$(9) \qquad \begin{cases} m\ddot{x} = X + \lambda k^2 \dot{x} \\ m\ddot{y} = Y + \lambda k^2 \dot{y} \\ m\ddot{z} = Z - \lambda \dot{z}, \end{cases}$$

come si ottiene facilmente sia applicando le equazioni di APPELL, sia per estensione delle equazioni lagrangiane [4]. E mentre le (9), unitamente alla (1) e ad assegnate condizioni iniziali, determinano univocamente il moto del punto, le (7), (8) lasciando indeterminata la legge di variazione di ϑ e quindi di x e di y, non consentono un'analoga determinazione. Da ultimo si osservi ancora che mentre dalle (8) consegue, come condizione necessaria per l'equilibrio di M, l'annullarsi della forza applicata, dalla (7), ponendovi $\ddot{\varphi} = 0$, risulta

$$Z = -\frac{1}{k}(X \cos \vartheta + Y \operatorname{sen} \vartheta)$$

che è soddisfatta anche da determinazioni non nulle della forza

[4] L. CASTOLDI: *Equazioni lagrangiane per i sistemi anolonomi non lineari nelle velocità.* « Rend. dell'Istituto lombardo di Scienze e Lettere ». (In corso di pubblicazione).

stessa. Tutto ciò risulta evidente qualora si pensi all'attuale struttura ($\rho = 0$) del dispositivo immaginato.

4. Supponiamo ora invece, e in ciò consiste sostanzialmente il procedimento di Appell, di far tendere ρ a zero nelle (6') senza mai attribuirgli, peraltro, il valore zero. Va inteso che così facendo si deve supporre di sperimentare su una successione di dispositivi analoghi a quello descritto e dotati di ρ diversi e tendenti a zero, oppure su un unico dispositivo con ρ variabile, ma da prova a prova, non durante un singolo moto di M, giacchè, in tal caso, occorrerebbe tener conto nelle equazioni dinamiche della variabilità di ρ, il che non si è fatto. Osservato ciò, riprendiamo le (6') che ora, esclusa la possibilità per ρ di annullarsi, possono scriversi:

$$(6'') \qquad \begin{cases} m(a^2 + b^2)\ddot{\varphi} = a(X \cos\vartheta + Y \operatorname{sen}\vartheta) + Zb \\ m\rho\ddot{\vartheta} = -X \operatorname{sen}\vartheta + Y \cos\vartheta \end{cases}$$

Basta allora supporre che la forza applicata non dipenda da ρ, per ricavare dalla seconda di esse che, pur tendendo ρ a zero, la quantità $\rho\ddot{\vartheta}$ si mantiene finita. Se, per es., si applica ad M una forza di intensità costante F perpendicolare al piano verticale contenente M e la ruota, la seconda delle (6'') diventa

$$m\rho\ddot{\vartheta} = F = \text{costante}$$

Risulta di qui che, attribuito a ρ un valore fisso comunque piccolo, è possibile applicare al punto M forze finite tali che la velocità $\rho\dot{\vartheta}$ con cui M stesso ruota attorno alla verticale del punto H cresca illimitatamente nel tempo.

Le relazioni

$$(10) \qquad \begin{cases} \dot{x} = a \cos\vartheta\,\dot{\varphi} - \rho \operatorname{sen}\vartheta\,\dot{\vartheta} \\ \dot{y} = a \operatorname{sen}\vartheta\,\dot{\varphi} + \rho \cos\vartheta\,\dot{\vartheta} \\ \dot{z} = b\dot{\varphi} \end{cases}$$

che seguono per derivazione da (2) e (3), danno allora, pur con ρ tendente a zero,

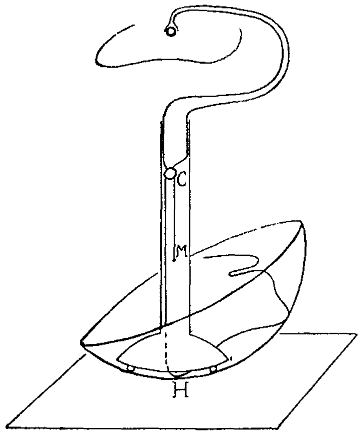
$$k^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \dot{z}^2 + k^2\rho^2\dot{\vartheta}^2$$

da cui risulta che, l'ultimo termine non tendendo a zero, *non* si realizza al limite il vincolo assegnato.

Il diverso risultato cui giunge l'Appell proviene dal non aver egli presa in considerazione la possibilità del mantenersi finito di $\rho\ddot{\vartheta}$ per ρ tendente a zero.

5. Le precedenti osservazioni mostrano l'opportunità di presentare un esempio di effettiva realizzazione di un vincolo anolonomo non lineare evitando il procedimento di passaggio al limite sopra descritto.

Si consideri a questo scopo una superficie sferica (o, praticamente, una porzione di essa) obbligata a rotolare senza strisciamento su un piano xy orizzontale. Alla parete interna di detta superficie è appoggiata mediante una « *base* » scorrevole una sbarra mantenuta verticale da un supporto mobile sul piano xy. Nella base stessa è contenuto un dispositivo per effetto del quale, in conseguenza del moto del sistema, un filo metallico flessibile e inestendibile *esce* dalla base stessa e viene « *applicato* » alla parete interna della superficie sferica lungo la traiettoria descritta su essa dal comune punto di contatto H del centro della base colla superficie sferica e di questa col piano orizzontale.



Il filo considerato si prolunga verticalmente entro la sbarra, e, attraverso una carrucola C, ha il suo estremo collegato al punto M di massa m su cui si esplica l'unica forza attiva F.

Si immagini inoltre che il filo, nei suoi due tratti verticali HC, CM entro la sbarra, sia « *guidato* », insieme al punto M, entro un tubo rigido che non gli consenta inflessioni, di guisa che un innalzamento di M provochi una fuoruscita, per un ugual tratto, del filo dalla base e quindi un moto corrispondente di tutto il sistema.

Poichè supponiamo impedito ogni « *rientro* » del filo nella base, per ogni movimento del sistema, il punto M non può che rimaner fermo o innalzarsi. È poi sempre possibile disporre le cose in modo che la verticale di M passi per H.

Si conosce allora facilmente che se ds è l'elemento d'arco della curva di applicazione del filo sulla parete interna della superficie sferica descritto dal punto H in corrispondenza ad uno spostamento di M di componenti dx, dy, dz, si ha:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dz; \tag{11}$$

e non è difficile immaginare contenuti entro la sbarra verticale altri cosiffatti congegni che, in luogo della (11), valga, con k costante positiva, la

(12) $$dz = k\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

È quindi realizzato in tal modo, per via diretta, il vincolo

(1) $$k^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \dot{z}^2;$$

e si noti che, effettivamente, il dispositivo descritto obbliga il punto M a muoversi, partendo da ogni sua posizione $\overline{M}$, sulla falda rivolta verso l'alto del cono ad asse verticale avente il vertice in M e apertura arccotg k, come richiede il vincolo (1).

Se si considerano trascurabili le masse di tutte le parti del sistema immaginato, esclusa quella di M, le equazioni del moto di M sono ora effettivamente le (9).

Se supponiamo, in più, che la carrucola C sia scorrevole entro la sbarra verticale e collegata a un supporto mobile senza attrito su una superficie generalmente variabile nel tempo e di equazione $z = f(x, y, t)$, si avrà, in luogo di (12)

(12′) $$dz = k\sqrt{dx^2 + dy^2} + 2(f_x dx + f_y dy + f_t),$$

e sarà quindi realizzato il vincolo

(1′) $$k^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dot{z}^2 + \\ = 4[f_x^2\dot{x}^2 + f_y^2\dot{y}^2 + f_t^2 + k\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}(f_x\dot{x} + f_y\dot{y} + f_t)] = 0,$$

che costituisce un esempio alquanto più generale di (1) di vincoli non lineari di mobilità.

Sempre trascurando tutte le masse, eccezion fatta per quella di M, le equazioni del moto sono attualmente

(13) $$\begin{cases} m\ddot{x} = X + \lambda\left[(k^2 + 4f_x^2)\dot{x} + 2kf_x\dfrac{2\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + 2kf_t\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}}}\right] \\ m\ddot{y} = Y + \lambda\left[(k^2 + 4f_y^2)\dot{y} + 2kf_x\dfrac{\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + 2kf_t\dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right] \\ m\ddot{z} = Z - \lambda\dot{z}. \end{cases}$$

Esse, insieme coll'equazione vincolare (1′) e con assegnate condizioni iniziali, determinano univocamente in funzione del tempo le incognite x, y, z e il moltiplicatore λ.