
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LANDO DEGOLI

Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 2
(1947), n.3, p. 217–221.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_3_217_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_3_217_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari.

Nota di LANDO DEGOLI (a Bologna) (*).

Sunto. - *Si ottengono le equazioni delle singole direzioni caratteristiche e delle singole proiettività caratteristiche in una trasformazione puntuale fra due spazi ordinari.*

1. Il VILLA, in alcune Note in corso di pubblicazione nei « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei » ⁽¹⁾, stabilisce le proprietà generali (dal punto di vista metrico, affine, proiettivo) delle trasformazioni puntuali fra due spazi lineari S_r , S_r in una coppia regolare (O, O) di punti corrispondenti.

In tale lavoro il VILLA considera in particolare i piani delle coppie di rette caratteristiche per O (oppure per $\bar{O}$) e le rette in cui questi piani sono intersecati dagli iperpiani individuati da $r-1$ rette caratteristiche diverse da quelle costituenti la coppia considerata ⁽²⁾.

Nella presente Nota, per $r=3$, si assumono, in ciascuno degli spazi, come piani coordinati appunto i piani di tre coppie di rette caratteristiche (costituite da rette caratteristiche diverse). Questa scelta del riferimento, a differenza di quelle già considerate ⁽³⁾, permette di ottenere agevolmente le equazioni delle singole rette caratteristiche e delle singole proiettività caratteristiche (n. 2).

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

Ringrazio vivamente il prof. VILLA per i suggerimenti datimi nel corso del presente lavoro.

⁽¹⁾ VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*. I. *Intorno del 2° ordine*; II. *Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci*; III. *Trasformazioni Cremoniane osculatrici*; IV. *Direzioni caratteristiche. Invarianti del 2° e del 3° ordine*, « Rend. dell'Accademia dei Lincei ».

⁽²⁾ VILLA, op. cit., Nota II, n. 4.

⁽³⁾ Nel caso metrico si assumevano di solito come assi cartesiani le direzioni principali (si veda ad es. CREANGA, *Sulla trasformazione degli intorno del 2° ordine di due punti corrispondenti, nelle corrispondenze puntuali fra due spazi euclidei*, « Rend. di Matematica », Ser. V, vol. 4, p. 177, 1940). Il VILLA si serve vantaggiosamente nei suoi lavori (si veda ad es.: *La configurazione caratteristica di una trasformazione puntuale fra due spazi lineari*; II. *Applicazioni*, « Rend. dell'Accademia d'Italia », Ser. VII, vol. IV, p. 217, 1941) di riferimenti nei quali vengono assunti come assi coordinati rette caratteristiche; nel caso proiettivo, assume poi come rette delle stelle O (opp. $\bar{O}$) passanti per i punti unità, pure rette caratteristiche.

Nel n. 3 si esprimono i coefficienti del 2° ordine della trasformazione mediante gli invarianti (metrici) indicati dal VILLA ⁽⁴⁾. Nel caso proiettivo (n. 4) si assume, in ciascuno degli spazi, come retta della stella O (opp. $\bar{O}$) passante per il punto unità la settima retta caratteristica (quella diversa dalle sei situate sui piani coordinati) ottenendo ulteriori semplificazioni.

2. Consideriamo una trasformazione puntuale T che muti i punti di un campo C di un $S_3(x_1, x_2, x_3)$ nei punti di un altro $\bar{S}_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ e riferiamoci ad una coppia regolare $(O, \bar{O})$. La T subordina fra le direzioni uscenti da O e quelle uscenti da $\bar{O}$ una proiettività ω ⁽⁵⁾. Assumiamo $O, \bar{O}$ come origini delle coordinate nei rispettivi spazi ed assumiamo in S_3 come assi $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ risp. le rette che corrispondono in ω agli assi x_1, x_2, x_3 . Allora le equazioni di T si possono scrivere

$$(2.1) \quad x_i = a_i x_i + \sum_{k,n} b'_{kn} x_k x_n + [3] \quad (i, k, n = 1, 2, 3),$$

le $a_i, b'_{kn} = b'_{nk}$ essendo costanti e indicando con $[3]$ i termini negli sviluppi di grado > 2 .

Le equazioni della configurazione caratteristica sono ⁽⁶⁾

$$(2.2) \quad \begin{aligned} a_k x_k \bar{x}_i - a_i x_i \bar{x}_k &= 0 & (i \neq k) \\ \sum_{k,n} \frac{1}{a_k} b'_{kn} x_n \bar{x}_k - \bar{x}_i + a_i x_i &= 0. \end{aligned}$$

Le rette caratteristiche per O sono ⁽⁷⁾

$$(2.3) \quad \frac{\sum_{k,n} b'_{kn} x_k x_n}{a_1 x_1} = \frac{\sum_{k,n} b'_{kn} x_k x_n}{a_2 x_2} = \frac{\sum_{k,n} b'_{kn} x_k x_n}{a_3 x_3} \quad (8)$$

Imponendo (n. 1) che ciascuno dei piani coordinati contenga due rette caratteristiche, si hanno le sei condizioni

$$(2.4) \quad a_i b'_{kk} (b'_{kk} b'_{nn} - b'_{kk} b'_{nn}) + 2a_k b'_{nn} (b'_{ik} b'_{kk} - b'_{ik} b'_{kk}) = 0$$

dove $i \neq k, i \neq n, k \neq n$ ($i, k, n = 1, 2, 3$).

⁽⁴⁾ VILLA, op. cit. nella ⁽³⁾, n. 5.

⁽⁵⁾ VILLA, op. cit. nella ⁽⁴⁾, Nota I, n. 2.

⁽⁶⁾ VILLA, op. cit. nella ⁽⁴⁾, Nota I, n. 2.

⁽⁷⁾ VILLA, op. cit. nella ⁽⁴⁾, Nota I, n. 2.

⁽⁸⁾ Ovviamente consideriamo qui il caso generale in cui sei delle sette direzioni caratteristiche per O possono supporre appartenenti a tre piani distinti (di cui due in ciascun piano). Nel caso proiettivo (n. 4) si supporrà inoltre che la settima retta caratteristica non appartenga ad alcuno dei tre piani precedenti.

Le equazioni delle sei rette caratteristiche giacenti nei piani coordinati sono

$$(2.5) \quad x_i = 0, \quad x_k = p_{n,i}, \quad x_n \quad \text{dove} \quad b^i_{kk} p^2_{n,i} + 2b^i_{kn} p_{n,i} + b^i_{nn} = 0,$$

dove gli indici i, k, n assumono successivamente risp. i valori 2, 1, 3; 3, 2, 1; 1, 3, 2.

Per avere le equazioni della settima retta caratteristica, fra le equazioni (2.3) che scriviamo

$$(2.6) \quad \frac{\sum_{k,n} b^1_{kn} x_k x_n}{a_1 x_1} = \frac{\sum_{k,n} b^2_{kn} x_k x_n}{a_2 x_2}, \quad \frac{\sum_{k,n} b^2_{kn} x_k x_n}{a_2 x_2} = \frac{\sum_{k,n} b^3_{kn} x_k x_n}{a_3 x_3}$$

eliminiamo x_1 il che non offre difficoltà. Si ottiene un'equazione di 9° grado omogenea in x_2, x_3 , o se si vuole un'equazione di 9° grado in $\frac{x_2}{x_3}$, della quale conosciamo 8 radici che sono: lo 0

quadrupla, ∞ doppia, $\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}$ (essendo p_1, p_2 le due radici dell'equazione (2.5) per $i=1, k=3, n=2$). Lo 0 è radice quadrupla perchè 2 radici sono nulle corrispondentemente a 2 rette caratteristiche, mentre altre due sono nulle corrispondentemente alle 2 radici comuni delle (2.6) che non soddisfano in generale la

$$(2.7) \quad \frac{\sum_{k,n} b^1_{kn} x_k x_n}{a_1 x_1} = \frac{\sum_{k,n} b^3_{kn} x_k x_n}{a_3 x_3}.$$

La rimanente radice dell'equazione di 9° grado $x_2 = \mu x_3$ si ottiene quindi subito.

Analogamente eliminando x_2 fra la prima delle (2.6) e la (2.7) si ottiene un'equazione di 9° grado in $\frac{x_1}{x_3}$ della quale conosciamo 8 radici. Si ottiene quindi subito la rimanente $x_1 = \lambda x_3$. Le equazioni della settima retta caratteristica sono

$$x_1 = \lambda x_3, \quad x_2 = \mu x_3.$$

Dalle equazioni (2.2) della configurazione caratteristica e da quelle delle 7 coppie di direzioni caratteristiche si ottengono subito anche le equazioni delle 7 proiettività caratteristiche.

Quelle delle 6 proiettività caratteristiche relative alle direzioni caratteristiche giacenti nei piani coordinati sono

$$(2.8) \quad \bar{x}_n = \frac{a^2_n x_n}{a_n + (b^n_{kk} p^2_{n,i} + 2b^n_{kn} p_{n,i} + b^n_{nn}) x_n},$$

dove i, k, n assumono successivamente risp. i valori 2, 1, 3; 3, 2, 1; 1, 3, 2.

3. Il VILLA ha dimostrato ⁽⁹⁾ che gli invarianti metrici di 2° ordine di una trasformazione puntuale fra due spazi lineari, in una coppia $(O, \bar{O})$ di punti corrispondenti, sono riconducibili agli angoli che le rette caratteristiche formano fra di loro e alle distanze dei punti limiti delle proiettività caratteristiche da O (opp. da $\bar{O}$).

I rapporti, cambiati di segno, delle coordinate omonime dei punti limiti relativi alle coppie di rette caratteristiche corrispondenti situate sui piani coordinati dei due spazi uguagliano i coefficienti a_i dei termini di 1° grado nelle (2.1). (Si noti che siffatte coordinate sono appunto esprimibili mediante gli angoli e le distanze suddette) ⁽¹⁰⁾.

Per ottenere i 18 coefficienti dei termini di 2° grado delle (2.1) espressi mediante gli angoli e le distanze suddette si può procedere nel modo seguente.

Se $p_{n,i}^*, \bar{p}_{n,i}$ sono le due radici dell'equazione (2.5), si ha

$$(3.1) \quad \frac{b_{kn}'}{b_{kk}'} = -p_{n,i}^* \bar{p}_{n,i}, \quad \frac{b_{nn}'}{b_{kk}'} = p_{n,i}^* \cdot \bar{p}_{n,i} \\ (i, k, n = 2, 1, 3; 3, 2, 1; 1, 3, 2).$$

Si noti che $p_{n,i}^*, \bar{p}_{n,i}$ si esprimono mediante gli angoli che le rette caratteristiche formano fra loro.

Sostituendo opportunamente le (3.1) nelle (2.4) queste divengono lineari nei b (dividendo per un conveniente fattore).

Altre sei relazioni lineari nei b si ottengono dalle (2.8) assegnando le coordinate dei punti limiti delle sei rette caratteristiche situate sui piani coordinati di S_3 . Queste sei relazioni lineari nei b , assieme alle (3.1) e alle (2.4) formano un sistema di 18 equazioni lineari nei b (col determinante dei coefficienti $\neq 0$) dal quale si ottengono i b stessi espressi nel modo voluto.

4. Nel caso proiettivo si possono assumere come rette $x=y=z$, $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}$ le rimanenti rette caratteristiche. Ciò implica $a=b=c$ e inoltre

$$\sum_{k,n} b_{kn}^1 = \sum_{k,n} b_{kn} = \sum_{k,n} b_{kn}^3.$$

La proiettività caratteristica fra $x=y=z$ e $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}$ è

$$(4.1) \quad \bar{x} = \frac{a^2 x}{a + (\sum_{k,n} b_{kn}^1) x}.$$

⁽⁹⁾ Cfr. VILLA, op. cit. nella ⁽³⁾, n. 5.

⁽¹⁰⁾ Cfr. VILLA, op. cit. nella ⁽³⁾, n. 5.