Bollettino Unione Matematica Italiana

Guido Ascoli

Un'osservazione sulle formule di quadratura

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.3, p. 212–216.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_3_212_0>

Un' osservazione sulle formule di quadratura.

Nota di GUIDO ASCOLI (a Torino).

Sunto. - *Considerata la relazione*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_1^k \lambda_r f(a + t_r(b-a))$$

con $0 \leq t_1 > t_2 < \dots < t_k \leq 1$, $\lambda_r > 0$, *come una possibile formula di quadratura, e suppostala valida per* $A < a < ë < B$, *si dimostra, sotto condizioni di estrema generalità, che se* $\Sigma\lambda_r \neq 1$ *è* $f(x) \equiv 0$, *mentre nel caso opposto* $f(x)$ *coincide in* $A^{\,-}B$ *con un qualunque polinomio di grado* s, *ove* s *è il minimo intero per il quale è* $(s+2)\Sigma\lambda_r t_r^{s+1} \neq 1$. *Nel caso di un intervallo chiuso possono aversi eccezioni agli estremi.*

Tra le formule di quadratura approssimata sono particolarmente importanti, perchè meglio si prestano all' integrazione delle funzioni empiriche, quelle che si propongono di esprimere il valor medio di una funzione $f(x)$ in un intervallo $a \vdash\!\dashv b$ mediante una combinazione lineare dei valori della funzione in punti che dividono l'intervallo di integrazione in rapporti determinati, e che possono quindi scriversi nella forma generale:

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)dx = (b-a) \sum_1^k \lambda_r f(a + t_r(b-a))$$

ove è:

$$(2) \qquad 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq 1, \qquad \lambda_r \neq 0.$$

La ricerca di una formula siffatta si fonda di solito sul concetto di rendere la formula stessa esatta per i polinomi sino ad un certo grado prefissato, condizione a cui si agginngono esigenze di ordine vario, tali da rendere possibile ed univoca la determinazione delle costanti λ_r e t_r. Ora a prima vista tale posizione del problema appare del tutto arbitraria; onde si pone la questione se, scritta una formula del tipo (1), le costanti λ_r e t_r essendo in essa solo vincolate dalle condizioni (2), esista oppur no una funzione non identicamente nulla che vi soddisfi, per ogni coppia a, b di valori entro il suo campo di esistenza, e se tale funzione coincida necessariamente in tal campo con un polinomio — arbitrario o no — di grado non superiore ad un certo valore s.

Come è da aspettarsi, la questione, cioè la risoluzione dell'equazione integro-funzionale (1), non è nuova; la troviamo infatti posta, in forma equivalente, dal Bordoni [1] sin dal 1842, e risoluta, secondo lo spirito dell'epoca, in modo da presupporre che la f sia analitica, o possegga almeno derivate sino ad un ordine sufficientemente elevato; e la cosa è allora quasi immediata. Essa richiede invece qualche considerazione preliminare, non priva d'interesse, quando per la f si adottino le sole ipotesi necessarie affinchè la (1) abbia senso. Mi propongo qui, precisamente, di trattare la questione ammettendo che *la* f *sia integrabile secondo Lebesgue in ogni parte finita di un intervallo aperto* A — B, *e che la* (1) *valga per ogni scelta di* a *e* b (*con* a < b) *in questo intervallo.* Il risultato è ad ogni modo il medesimo, e cioè:

[1] Bordoni (A), *Proposizioni teoriche e pratiche di Matematica.* Pavia, 1842, p 13, prop. IV. Segnalo agli studiosi quest'operetta per la predilezione che ivi l'A. dimostra per questioni, che egli trae dalla Geometria, dall'Idraulica e dalla Matematica finanziaria, che conducano ad equazioni funzionali. Di ciò si ha del resto traccia anche nelle suo più note *Lezioni di Calcolo sublime.*

La (1) *ha solo la soluzione nulla se* $\Sigma\lambda_r \neq 1$; *nel caso opposto essa vale per tutti i polinomi di grado non superiore ad un certo numero* s, *e solo per essi. Il numero* s *è il minimo intero per il quale risulta*:

$$\sum_1^k \lambda_r t_r^{s+1} \neq \frac{1}{s+2}. \tag{3}$$

Per il caso di un intervallo *chiuso* $A \vdash\!\dashv B$ si vegga l'osservazione finale della Nota.

1. Eseguiamo nella (1) un cambiamento di variabili, ponendo:

$$a + t_1(b - a) = \xi, \qquad a + t_k(b - a) = \eta.$$

Si ricava di qui:

$$a = \xi - \frac{t_1}{t_k - t_1}(\eta - \xi), \qquad b = \xi + \frac{1 - t_1}{t_k - t_1}(\eta - \xi)$$

onde alle condizioni:

$$A < a < b < B$$

corrispondono per ξ e η le altre:

$$t_k\xi - t_1\eta - (t_k - t)_1 A > 0, \qquad (1 - t_k)\xi - (1 - t_1)\eta + (t_k - t_1)\, B > 0,$$
$$\eta - \xi > 0.$$

ed è facile vedere che esse definiscono l'interno T del triangolo che ha per vertici i punti:

$$(A,\ A), \quad (B,\ B), \quad (A + t_1(B - A), \quad A + t_k(B - A)).$$

Ponendo allora per brevità:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

dove x_0 è un punto qualunque di $A \frown B$, ed anche:

$$\alpha = \frac{t_1}{t_h - t_1}, \qquad \beta = \frac{1 - t_1}{t_k - l_1}, \qquad u_r = \frac{t_r - t_1}{t_k - t_1}$$

la (1) si trasforma agevolmente nell'altra:

$$F(\xi + \beta(\eta - \xi)) - F(\xi - \alpha(\eta - \xi)) =$$
$$= \frac{\eta - \xi}{t_k - t_1}\left[\lambda_1 f(\xi) + \lambda_k f(\eta) + \sum_2^{k-1} \lambda_r f(\xi + u_r(\eta - \xi))\right]$$

che può scriversi:

$$(4)\qquad \begin{aligned}(t_k - t_1)\,\frac{F(\xi + \beta(\eta - \xi)) - F(\xi - \alpha(\eta - \xi))}{\eta - \xi} &= \\ = \lambda_1 f(\xi) + \lambda_k f(\eta) + \sum_2^{k-1} [\lambda_r f(\xi + u_r(\eta - \xi))]. \end{aligned}$$

Ora è chiaro che il primo membro è funzione continua di (ξ, η) nell'area T; tale è dunque il secondo. Ne deduciamo che $f(x)$ è *continua in* $A \vdash\!\dashv B$. E difatti sia (ξ_0, η_0) un punto arbitrario di T e le

$$\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \qquad \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$$

rappresentino un suo intorno rettangolare R, pure contenuto in T. Integrando allora il secondo membro della (4) rispetto ad η, tra η_1 ed η_2, si avrà una funzione di ξ, continua in $\xi_1 \vdash\!\dashv \xi_2$; ha dunque tale proprietà la funzione:

$$(5)\qquad \begin{aligned}\lambda_1(\eta_2 - \eta_1)f(\xi) + \lambda_k\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(\eta)d\eta + \sum_2^{k-1}\lambda_r\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(\xi_1 + u_r(\eta - \xi))d\eta &= \\ = \lambda_1(\eta_2 - \eta_1)f(\xi) + \lambda_k[F(\eta_2) - F(\eta_1)] &+ \\ + \sum_2^{k-1}\frac{\lambda_r}{u_r}[F(\xi + u_r(\eta_2 - \xi)) - F(\xi + n_r(\eta_1 - \xi))]&.\end{aligned}$$

Di qui, per la continuità della F, si deduce subito che $f(\xi)$ è continua in $\xi_1 \vdash\!\dashv \xi_2$, e in particolare in ξ_0. Ma ξ_0 può essere scelto a piacere in $A \vdash\!\dashv B$, onde segue l'asserto.

Possiamo ora affermare che la F è derivabile, con derivata continua; ne viene che il primo membro della (4) possiede in T derivate parziali continue. Tale proprietà avrà quindi il secondo membro; assumendo allora ξ in $\xi_1 \vdash\!\dashv \xi_2$ ed integrando rispetto ad η tra η_1 e η_2 concludiamo che ambo i membri della (5) ammettono in $\xi_1 \vdash\!\dashv \xi_2$ derivata continua. Ne segue che la $f(\xi)$ ammette per $\xi = \xi_0$, e quindi in tutto $A \vdash\!\dashv B$, derivata continua.

È chiaro come il procedimento si possa ripetere indefinitamente; e si ottiene così, per induzione, che $f(x)$ *possiede il* $B \vdash\!\dashv A$ *derivate continue di ogni ordine.*

2. Il resultato ottenuto ci permette di derivare la (1) n volte rispetto a b; si ottiene così:

$$f^{(n-1)}(b) = (b - a)\sum_1^k \lambda_r t_r^{\,n} f^{(n)}(a + t_r(b - a)) + n\sum_1^k \lambda_r t_r^{\,n-1} f^{(n-1)}(a + t_r(b - a))$$

da cui, per $b \to a$:

$$f^{(n-1)}(a) = n f^{(n-1)}(a) \sum_1^k \lambda_r t_r^{n-1}$$

cioè

$$\left(1 - n \sum_1^k \lambda_r t_r^{n-1}\right) f^{(n-1)}(a) = 0. \tag{6}$$

Ora non può aversi per ogni intero $n > 0$

$$\sum_1^k \lambda_r t_r^{n-1} = \frac{1}{n};$$

infatti se $t_k < 1$ i due membri divengono per $n \to \infty$ infinitesimi di ordine diverso, mentre se $t_k = 1$ il secondo membro è ancora infinitesimo per $n \to \infty$, mentre il primo tende $a\lambda_k \neq 0$. Esiste dunque un primo valore di n, e sia n_0, per il quale non vale la (7). Per tale valore di n la (6) dà allora, identicamente,

$$f^{(n_0-1)}(a) = 0.$$

Sono allora da distinguere due casi. Se $n_0 = 1$, cioè $\Sigma\lambda_r \neq 1$, si ha $f(a) = 0$, ossia la f è identicamente nulla; se $n_0 > 1$ la f coincide in A^-B con un polinomio di grado non superiore ad $n - 2$.

Viceversa, se la f coincide in A^-B con un tale polinomio, i due membri della (1) risultano due polinomi di grado non superiore ad $n_0 - 1$, i quali, valendo la (6) per $n < n_0$, sono eguali nel punto a insieme alle loro prime $n_0 - 1$ derivate; onde sono identicamente eguali. E si noti che la (1) vale quindi anche per $b < a$.

Basta porre $n_0 - 2 = s$ per ottenere senz'altro il teorema nella forma data nell'introduzione.

Osservazione. — Quando la $f(x)$ si supponga definita nell'intervallo *chiuso* $A \vdash\!\dashv B$, e che la (1) valga per ogni coppia di valori a, b, scelti in tale intervallo, le conclusioni precedenti restano naturalmente valide per i punti interni all'intevallo. Esse possono invece non valere per i punti estremi se $t_1 > 0$ e $t_k < 1$; difatti in tal caso un mutamento dei valori $f(A($, $f(B)$ non influisce in alcun modo sulla validità della (1). Se invece è $t_1 = 0$, un leggero adattamento della dimostrazione precedente (si osservi la forma che assume allora il triangolo T) prova che in tal caso si ha continuità anche in A, e vale anche per questo punto la coincidenza con un polinomio di grado opportuno. Lo stesso vale, se $t_k = 1$, nei riguardi dell'estremo B.