
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

BENIAMINO SEGRE

Sul massimo numero di nodi delle superficie di dato ordine

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 2
(1947), n.3, p. 204–212.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_3_204_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_3_204_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sul massimo numero di nodi delle superficie di dato ordine.

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Bologna) (*).

Sunto. - *Costruzione di sistemi continui sovrabbondanti di superficie algebriche dello spazio ordinario dotate di nodi, e di superficie possedenti un numero anomalo di nodi.*

Introduzione.

1. In una recente Memoria ⁽¹⁾, ricca anche d'importanti risultati preparatori, il SEVERI ha assegnato pel numero δ dei nodi isolati che può possedere una superficie d'ordine m dello spazio

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

⁽¹⁾ F. SEVERI, *Sul massimo numero di nodi di una superficie di dato ordine dello spazio ordinario o di una forma di un iperspazio*, « Annali di Mat. » (4) 25 (1946), pp. 1-41.

ordinario la limitazione $\delta \leq N_{m-1} - 3$, ove

$$N_m = \binom{m+3}{3} - 1$$

(tale limite superiore essendo raggiunto per $m = 4$ e per $m = 5$ rispettivamente dalle superficie di KUMMER e di TOGLIATTI). La limitazione suddetta è ivi ottenuta dall'Autore sulla base di un postulato, di cui egli dà una giustificazione intuitiva, avvertendo che « la deduzione non è certo rigorosa; si tratta piuttosto di un'induzione, sulla quale però non sembra che possano cadere dubbi ». L'induzione consiste nell'affermare che, se una superficie algebrica variabile con continuità perde un certo numero d'integrali doppi (propri) di 2ª specie, cioè di cicli bidimensionali trascendenti, il numero dei moduli da cui essa dipende si abbassa almeno di altrettanto.

Ciò conduce inoltre a rintracciare fra le famiglie di superficie di ordine m , aventi δ nodi, soltanto sistemi completi irriducibili regolari, cioè aventi dimensione effettiva Θ uguale alla dimensione virtuale $\theta = N_m - \delta$; cosicchè, in ultima analisi, la limitazione di SEVERI vale, a prescindere dal postulato, per tutti i sistemi regolari.

In questa Nota dimostro l'esistenza di sistemi sovrabbondanti, e cioè di dimensione $\Theta > \theta$, ai quali quindi più non si può applicare il principio ammesso dal SEVERI. Non v'è pertanto da stupirsi che vi siano superficie con un numero anomalo di nodi

$$\delta > N_{m-1} - 3,$$

l'esistenza delle quali viene pure stabilita nel presente lavoro.

2. Questi risultati, e la profonda analisi del SEVERI, mostrano l'estrema difficoltà del problema di determinare il massimo numero μ_m di nodi isolati che può avere una superficie d'ordine m dello spazio ordinario; problema che è tuttora insoluto per $m \geq 5$. Osserverò al riguardo che, a differenza di quanto accade per l'analogo carattere $(m-1)(m-2)/2$ relativo alle curve piane irriducibili d'ordine m , μ_m (per $m = 1, 2, 3, \dots$) non è funzione razionale intera di m . Invero, se μ_m risultasse un polinomio in m , siccome per $m \geq 4$ si ha *

$$(1) \quad \mu_m \leq m^2(m-2)/2, (*)$$

dovrebbe tale polinomio avere grado non superiore al terzo; e

(*) Cfr. F. SEVERI, loc. cit., § 2.

poichè notoriamente

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = 4, \quad \mu_4 = 16,$$

si dedurrebbe $\mu_m = (m-1)(7m^2 - 29m + 36)/6$, contraddicendo così la (1) per tutti i valori $m \geq 5$ dell'ordine.

L'osservazione precedente suggerisce di modificare quel problema col chiedere se esistano un intero m_0 e quattro numeri razionali a, b, c, d tali che sia

$$(2) \quad \mu_m = am^3 + bm^2 + cm + d \quad \text{per } m \geq m_0.$$

Non è però neppure facile decidere se questa domanda abbia risposta affermativa o negativa, nè tantomeno assegnare i valori di m_0, a, b, c, d nel caso affermativo.

Rileverò soltanto in proposito che, se vale la (2), il lavoro citato di SEVERI mostra come probabile che i valori $m = 1, 2, 3$ facciano ad essa eccezione, sicchè $m_0 \geq 4$; inoltre il confronto delle (1), (2) fornisce $a \leq 1/2$. Qui proverò di più (n. 9) che, se vale la (2), ivi dev'essere $a > 1/6$, mentre la limitazione di SEVERI $\delta \leq N_{m-1} - 3$ darebbe $\mu_m \leq N_{m-1} - 3$ e quindi $a \leq 1/6$.

Sistemi sovrabbondanti.

3. Stabiliamo anzitutto il lemma seguente.

Se una forma $F(x)$, di grado rn in un qualunque numero di variabili x , può esprimersi mediante un determinante simmetrico di ordine $r \geq 2$:

$$(3) \quad F(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1r}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{r1}(x) & \dots & f_{rr}(x) \end{vmatrix} \quad (f_{ij} = f_{ji}),$$

in cui elementi siano forme di grado n nelle x , allora essa può più generalmente rappresentarsi col determinante simmetrico

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \dots & \varphi_{1r}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{r1}(x) & \dots & \varphi_{rr}(x) \end{vmatrix} \quad (\varphi_{hk} = \varphi_{kh}),$$

in cui

$$(5) \quad \varphi_{hk}(x) = \sum_{i,j=1}^r a_{ih} a_{jl} f_{ij}(x) \quad (h, k = 1, 2, \dots, r)$$

e le a sono r^2 costanti arbitrarie di determinante $A = |a_{ih}| = \pm 1$. Ogni rappresentazione di $F(x)$ mediante la (4), ove le $\varphi_{hk}(x)$ dipendano analiticamente da uno o più parametri λ e si riducano per particolari valori di questi alle $f_{hk}(x)$, le quali siano forme generiche a coefficienti costanti di grado n nelle x , può ottenersi esprimendo le $\varphi_{hk}(x)$ nella forma (5) colle a funzioni opportune delle λ .

In virtù delle $f_{ij}(x) = f_{ji}(x)$, dalle (5) seguono le $\varphi_{hk}(x) = \varphi_{kh}(x)$. Dunque, in forza delle (5), dalla simmetria del determinante (3) segue che pure il determinante (4) risulta simmetrico; inoltre questo determinante vale $A^2 F(x)$, e si riduce pertanto ad $F(x)$ se, e soltanto se, $A = \pm 1$. È poi chiaro che i due determinanti (3), (4) si identificano elemento per elemento ove si assuma $a_{ii} = 1$ ed $a_{ih} = 0$ per $i \neq h$ ($i, h = 1, 2, \dots, r$).

Incominciamo col dimostrare che, se $n = 1$, e le $f_{ij}(x)$ sono $r(r+1)/2$ forme linearmente indipendenti, non vi sono per $F(x)$ rappresentazioni del tipo (4) all'infuori di quelle contemplate nel precedente enunciato. Infatti, nelle ipotesi ammesse, possiamo assumere le f_{ij} come coordinate omogenee di punto in uno spazio Σ , di dimensione $r(r+1)/2 - 1 = (r-1)(r+2)/2$, e rappresentare coi punti di Σ le quadriche di un S_{r-1} , in cui $(y_1, y_2, \dots, y_r)$ siano coordinate omogenee di punto, associando il punto (f_{ij}) di Σ alla quadrica

$$\sum_{i,j=1}^r f_{ij} y_i y_j = 0$$

di S_{r-1} . Con ciò, in forza della (3), $F(x) = 0$ è l'equazione della varietà V di VERONESE rappresentativa in Σ dei coni di S_{r-1} . Affinchè $F(x)$ si rappresenti colla (4), in cui le φ siano forme lineari nelle x , occorre che le φ risultino funzioni lineari omogenee delle f a coefficienti indipendenti dalle x , il che fornisce in Σ un'omografia trasformante V in sè. Questa si riflette in una corrispondenza birazionale senza eccezioni fra le quadriche di S_{r-1} , che muta coni in coni e quindi iperpiani doppi in iperpiani doppi ⁽³⁾, ed è perciò indotta da un'omografia di S_{r-1} . Dette

$$y_i = \sum_{h=1}^r a_{ih} \gamma_h \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

le equazioni di quest'ultima, è subito visto che la corrispondente omografia di Σ si rappresenta colle (5), le quali nelle ipotesi attuali implicano, come già abbiamo rilevato, la condizione $A = \pm 1$.

Passiamo ora al caso generale in cui le f e le φ siano forme di grado n arbitrario nelle x , le seconde delle quali dipendano analiticamente da uno o più parametri λ , per modo che i determinanti (3) e (4) risultino uguali. Non è restrittivo limitarci ad un solo parametro λ ; e supponiamo che per $\lambda = \lambda_0$ le $\varphi_{hk} = \varphi_{hk}(x, \lambda)$ si identifichino colle $f_{hk}(x)$, le quali siano $r(r+1)/2$ forme gene-

⁽³⁾ Quest'ultima deduzione segue da proprietà delle varietà di VERONESE, per le quali cfr. B. SEGRE, *Sulle varietà di Veronese a due indici*, Nota I, « Rendic. Acc. Lincei » (6) 23 (1936)₁, pp. 303-309, n. 6.

riche di grado n nelle x . Il determinante (4) uguaglia $F(x)$, ed è quindi indipendente da λ ; esprimendo che la sua derivata rispetto a λ è nulla otteniamo l'identità:

$$(6) \quad \sum_{h,k=1}^r \varphi'_{hk}(x|\lambda) \Phi_{hk}(x|\lambda) = 0,$$

dove gli apici significano derivazioni rispetto a λ e $\Phi_{hk} = \Phi_{hk}(x|\lambda)$ denota il complemento algebrico di φ_{hk} in quel determinante. Le Φ_{hk} sono $r(r+1)/2$ forme di grado $(r-1)n$ nelle x , determinate a meno di un comune fattore (costante o dipendente soltanto da λ) dalle $r(r+1)/2 - 1$ equazioni lineari distinte

$$\sum_{h=1}^r \varphi_{hi} \Phi_{hi} = 0 \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, r).$$

$$\sum_{h=1}^r \varphi_{h1} \Phi_{h1} = \sum_{h=1}^r \varphi_{h2} \Phi_{h2} = \dots = \sum_{h=1}^r \varphi_{hr} \Phi_{hr}.$$

La (6) deve pertanto dipendere linearmente da queste, ciò che si traduce in un sistema di equazioni differenziali della forma

$$\varphi'_{hk}(x|\lambda) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^r \alpha_{hk}^{ij}(\lambda) \varphi_{ij}(x|\lambda) \quad (h \leq k; h, k = 1, 2, \dots, r),$$

colle α funzioni di λ indipendenti dalle x e regolari per $\lambda = \lambda_0$. Integrando questo sistema e ricordando le condizioni iniziali per $\lambda = \lambda_0$ otteniamo equazioni del tipo

$$(7) \quad \varphi_{hk}(x|\lambda) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^r \gamma_{hk}^{ij}(\lambda) C_{ij}(x),$$

dove le γ sono funzioni della sola λ il cui determinante non si annulla per $\lambda = \lambda_0$, e le C sono forme di grado n nelle x indipendenti da λ ; inoltre si ha

$$f_{hk}(x) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^r \gamma_{hk}^{ij}(\lambda_0) C_{ij}(x).$$

Risolvendo queste ultime equazioni rispetto alle C e sostituendo nelle (7) vediamo che le $\varphi_{hk}(x|\lambda)$ risultano combinazioni lineari delle $f_{ij}(x)$, a coefficienti funzioni di λ . Tali combinazioni lineari sono poi necessariamente della forma (5), come si ha osservando che, fissate genericamente le x , le $f(x)$ assumono valori generici che possono pensarsi quali variabili indipendenti, e quindi applicando quanto abbiamo dianzi ottenuto per $n=1$.

4. In base al lemma del n. 3 risulta che

Le superficie F di ordine rn dello spazio ordinario rappresentabili coll'equazione $F(x) = 0$, dove $F(x)$ sia dato dalla (3) in cui le $f_{ij}(x)$ denotino $r(r+1)/2$ forme quaternarie qualsiansi di grado n , costituiscono un sistema algebrico Σ di dimensione

$$(8) \quad \Theta = \binom{r+1}{2} \binom{n+3}{3} - r^2.$$

Invero la (3) definisce una corrispondenza algebrica irriducibile fra le superficie F di Σ ed i gruppi di $r(r+1)/2$ superficie d'ordine n dello spazio ordinario, di equazioni $f_{ij}(x) = 0$; e questi ultimi dipendono da $N_n r(r+1)/2$ parametri. Ad uno generico di tali gruppi corrispondono $\infty^{r(r+1)/2-1}$ superficie F di Σ , ottenibili dalla (3) coll'alterare i polinomi $f_{ij}(x)$ per fattori costanti arbitrari. Inoltre, in base al lemma del n. 3, ad una superficie generica di Σ corrispondono ∞^{r^2-1} gruppi di superficie d'ordine n . Dunque il principio del conto delle costanti ⁽⁴⁾ porge

$$\Theta + (r^2 - 1) = N_n r(r+1)/2 + [r(r+1)/2 - 1],$$

d'onde segue la (8).

5. Proviamo ora che

La superficie generale del sistema Σ dianzi considerato ammette come uniche singolarità puntuali

$$(9) \quad \delta = \binom{r+1}{3} n^3$$

nodì, ottenibili annullando simultaneamente tutti i minori d'ordine $r-1$ del relativo determinante (3).

La (3) fornisce l'identità

$$(10) \quad F(x) = f_{ii}(x)F_{ii}(x) + G_{ii}(x),$$

dove $G_{ii}(x)$ è una forma nelle x che non dipende dalla $f_{ii}(x)$ ed $F_{ii}(x)$ denota il complemento algebrico di $f_{ii}(x)$ nel determinante (3). Pertanto, se si lascia variare arbitrariamente la $f_{ii}(x)$ tenendo fisse tutte le altre $f_{ij}(x)$, la superficie F descrive un sistema lineare i cui punti base soddisfano alla $F_{ii}(x) = 0$. In virtù del teorema di BERTINI, da qui si deduce che ogni punto multiplo della generica superficie F di Σ deve soddisfare le $F_{11}(x) = F_{22}(x) = \dots = F_{rr}(x) = 0$. In ciascuno di tali punti allora si annullano anche le F_{ij} ad in-

⁽⁴⁾ Per il quale cfr. ad es. B. L. VAN DER WAERDEN, *Einführung in die algebraische Geometrie* (Berlin, Springer, 1939), p. 141.

dici i, j disuguali, avendosi notoriamente $F_{ii} = F_i$, e $F_{ii}F_{jj} - F_{ij}^2 = F_{ij}^*F$, dove F_{ij}^* denota il minore che si ottiene dal determinante (3) sopprimendovi le due righe e le due colonne di posti i, j .

La nota regola di derivazione di un determinante mostra subito che ogni punto in cui si annullino tutti i minori d'ordine $r - 1$ del determinante (3) è *almeno doppio* per la superficie F . Stabiliremo nel n. 8 che i punti suddetti sono in *numero finito* e che ciascuno di essi è *non più che doppio* per una F particolare, onde gli stessi fatti dovranno a fortiori aver luogo per la generica F . Il numero δ dei punti doppi di F si esprime allora notoriamente colla (9) ⁽⁵⁾.

6. Possiamo infine dimostrare che

Se $r \geq 2$, $n \geq 4$, il sistema Σ considerato nel n. 4 risulta *sovrabbondante*.

Poichè le superficie di Σ sono di ordine rn e posseggono δ nodi, così la dimensione virtuale di Σ vale

$$\theta = N_{rn} - \delta = rn(n^2 + 6rn + 11), 6$$

in virtù dei nn. 1 e 5. Avuto riguardo alla (8) si ha pertanto

$$\Theta - \theta = \binom{r}{2} \binom{n-1}{3},$$

ond'è effettivamente $\Theta > \theta$ se $r \geq 2$, $n \geq 4$.

Superficie dotate di un numero anomalo di nodi.

7. Possiamo prevedere l'esistenza di superficie possedenti un numero anomalo di nodi col seguente ragionamento. Alle superficie del sistema Σ definito nel n. 4 possono venire imposti $[\Theta/4]$ nuovi punti doppi, assegnati in posizione generica. Le superficie F^* che così si ottengono hanno l'ordine rn e sono dotate di

$$\left[\frac{\Theta}{4}\right] + \delta \geq \frac{r(r-7)n^3 - r(18r-6)n^2 + r(11r-5)n - 6r(r-1) + 156}{48} + N_{rn-1} - 3$$

nodi; orbene tale numero di nodi supera il limite superiore di SEVERI $N_{rn-1} - 3$, se ad esempio $r \geq 8$, $n \geq 138$.

Questo ragionamento andrebbe però completato dimostrando esaurientemente l'esistenza di quelle superficie F^* , e provando che la generica F^* non acquista in conseguenza infiniti punti doppi, il che non sembra agevole da farsi. Preferiamo perciò raggiungere

⁽⁵⁾ Cfr., anche per altre citazioni, C. SEGRE, *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*, « Rend. Acc. Lincei » (5) 9 (1900)₂, pp. 253-260, n. 5.

il nostro scopo altrimenti, completando nel medesimo tempo qualche dettaglio lasciato in sospeso nel n. 5.

8. Consideriamo $r + 1$ forme quaternarie qualsiasi di grado n

$$(11) \quad f_0(x), f_1(x), \dots, f_r(x),$$

ed assumiamo

$$(12) \quad \begin{aligned} f_{ii}(x) &= f_0(x) + f_i(x), & f_{ij}(x) &= f_0(x) \\ (i \neq j; & \quad i, j = 1, 2, \dots, r; & \quad r \geq 2). \end{aligned}$$

Allora la (3) fornisce identicamente

$$(13) \quad F(x) = f_0(x)f_1(x) \dots f_r(x) \sum_{h=0}^r \frac{1}{f_h(x)}.$$

Facciamo quindi variare in un sistema lineare una di quelle forme (11), ad esempio l'ultima, tenendo fisse le altre. Dalla (13) risulta che anche F varia in un sistema lineare, i cui punti base (supposto ve ne siano) soddisfanno alla

$$f_0(x)f_1(x) \dots f_{r-1}(x) = 0.$$

In virtù del teorema di BERTINI, quest'equazione dev'essere verificata anche dai punti multipli della generica F di quel sistema lineare. Se in un tal punto — ove F abbia molteplicità $s \geq 2$ — è ad esempio $f_1(x) = 0$, il punto medesimo deve avere molteplicità $\geq s$ per la curva secondo cui $f_1(x) = 0$ sega F , e cioè per la curva

$$(14) \quad f_1(x) = 0, \quad f_0(x) \cdot f_1(x) \dots f_r(x) = 0.$$

Ne discende che, se le $r + 1$ forme (11) sono generiche, i soli punti che possano risultare multipli per F sono quelli in cui tre di quelle forme si annullano, ciascuno dei quali è al più doppio per F . Il numero di tali punti risulta dunque finito; si verifica subito ch'esso è precisamente espresso dalla (9), e che ciascuno di detti punti è multiplo — e quindi precisamente doppio — per F .

9. Particolarizziamo ulteriormente le superficie F del n. 8 come segue. Assumiamo ancora ad arbitrio la prima delle forme (11), ma scegliamo le altre in guisa che ciascuna delle r forme $f_i(x)$, definite dalle (12), si spezzi nel prodotto di n forme lineari generiche. Con ciò rimane lecito di far variare in un sistema lineare una delle (11), che non sia la prima, tenendo fisse le altre, il che si ottiene lasciando variare in un sistema lineare una delle n forme lineari in cui spezza la corrispondente $f_i(x)$; si può dunque applicare l'argomentazione del n. 8, che conduce a ricercare i punti multipli di F fra i punti multipli della (14) e delle curve ana-

loghe. Così si vede che anche ora F ha un numero finito di punti multipli, ciascuno dei quali è solamente doppio per una delle curve suddette e quindi pure per F . Attualmente, però, oltre ai δ punti del n. 8 se ne ottengono dei nuovi, in quanto ciascuna delle r curve $f_0(x) = f_i(x) = 0$, ossia delle $f_0(x) = f_{ii}(x) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$), ha dei punti doppi.

Più precisamente, la superficie $f_{ii}(x) = 0$ ha ora per ipotesi una curva doppia spezzata in $n(n-1)/2$ rette. Ognuna di queste rette sega la $f_{ii}(x)$ in n punti che sono doppi non solo per la curva $f_0(x) = f_{ii}(x) = 0$, ma anche per F , come mostra la (10) quando si osservi che, in virtù delle (3), (12), la forma $G_{ii}(x)$ è divisibile per $[f_0(x)]^2$. È poi facile sincerarsi che i punti così determinati per $i = 1, 2, \dots, r$, complessivamente in numero di $r \cdot n \cdot n(n-1)/2$, sono tutti e soli i punti doppi supplementari di F .

Risulta pertanto provata l'esistenza di superficie d'ordine nr dello spazio ordinario dotate di un numero di nodi isolati pari a

$$(15) \quad \delta_1 = \delta + rn^2(n-1)/2 = rn(r^2n^2 + 2n^2 - 3n)/6;$$

questo numero è anomalo se $r \geq 2$, $n > 3(r+1)/2$, essendo allora $\delta_1 > N_{nr-1} - 3$.

Ne consegue che il numero μ_m definito nel n. 2 soddisfa alla $\mu_{rn} \geq \delta_1$. Non può dunque valere la (2) con $a \leq 1/6$, poichè altrimenti — tenuto conto della (15) — per $r \geq 2$ fissato ed n sufficientemente grande sarebbe invece $\mu_{rn} < \delta_1$.

Aggiungiamo da ultimo che tutti i risultati di questa Nota possono, nel caso più semplice $r = 2$, venir confermati mediante ragionamenti diretti, di carattere relativamente elementare, che lasciamo al Lettore.