Bollettino Unione Matematica Italiana

Pia Nalli

L'equazione differenziale $y'' + y = f(x)\sqrt{1 - y^2 - y'^2}$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.3, p. 195–204.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_3_195_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1947.

L'equazione differenziale $y'' + y = f(x)\sqrt{1 - y^2 - y'^2}$.

Nota di Pia Nalli (a Catania).

Sunto. - *È identico alle prime venticinque righe della Nota. Ci dispensiamo perciò dal ripeterlo.*

Il problema di trovare la curva di cui siano assegnate la curvatura e la torsione in funzione dell'arco è stato risolto in una mia memoria [1] per mezzo di una equazione di Volterra di seconda specie. Il metodo si estende ad uno spazio euclideo ad n dimensioni, in cui il problema di trovare la curva di cui siano assegnate le $n - 1$ curvature in funzione dell'arco si riduce a meno di quadrature, ad un'equazione integrale di Volterra il cui nucleo sia

$$N(t,\ s) = \sum_1^{n-1}{}_i\, g'_i(s)[g_i(t) - g_i(s)]$$

e la funzione $k(t)$ sia

$$k(t) = \beta_0 - \sum_1^{n-1}{}_i\, \alpha_{i0}[g_i(t) - g_i(t_0)].$$

Il problema in uno spazio euclideo a tre dimensioni si può anche ridurre ad una equazione differenziale del secondo ordine.

Tale problema è equivalente a meno di quadrature a quello di integrare le equazioni differenziali di un trasporto rigido, risoluto dal Darboux per mezzo di un'equazione differenziale di Riccati dove figurano però delle quantità complesse. In essa la conoscenza di un integrale porta alla conoscenza dell'integrale generale. Ma per fare questo bisogna conoscere due funzioni di variabili reali.

Noi ricondurremo il problema alla integrazione di una equazione differenziale del secondo ordine nel campo reale. Questa equazione ha una analogia con quella di Riccati perchè la conoscenza

(8) Bompiani, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi*, « Mem. dell'Acc. d'Italia », Ser. VI, vol. XIII, p. 843, 1942.

A tale involuzione si perviene anche per altra via in Villa, op. cit. nella (7), n. 7.

(1) *Annali di Matematica pura ed applicata*. Serie IV, tomo XVII, pp. 193-202.

di un suo integrale porta all'integrale generale per mezzo di quadrature. Il metodo si presenta come generalizzabile agli spazi a più di tre dimensioni mentre così non è del metodo di DARBOUX.

Il problema lo porremo in questo modo: trovare un versore u funzione di un parametro s, conoscendo due funzioni di s

$$R(s), \qquad T(s)$$

tali che

$$\frac{du}{ds} = Rv,$$

$$\frac{dv}{ds} = -Ru - Tw, \tag{1}$$

$$\frac{dw}{ds} = Tv,$$

dove v e w sono due versori definiti da queste relazioni. Nel caso del nostro problema sarà u il versore tangente alla curva, s l'arco e $R(s)$ e $T(s)$ la curvatura e la torsione assegnate.

Essendo u un versore, chiamando u_1, u_2, u_3 le sue componenti cartesiane, potremo porre

$$u_1 = \cos\theta \cos\varphi,$$
$$u_2 = \cos\theta \operatorname{sen}\varphi,$$
$$u_3 = \operatorname{sen}\theta,$$

dove θ e φ sono funzioni di s. Intanto è:

$$\frac{du_1}{ds} = -\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\frac{d\theta}{ds} - \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\frac{d\varphi}{ds},$$

e derivando di nuovo

$$\frac{d^2u_1}{ds^2} = -\cos\theta\cos\varphi\left[\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right] - \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\frac{d^2\theta}{ds^2} - \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\frac{d^2\varphi}{ds^2} +$$
$$+ 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\frac{d\theta}{ds}\frac{d\varphi}{ds}.$$

D' altra parte è

$$\frac{du_2}{ds} = -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\frac{d\theta}{ds} + \cos\theta\cos\varphi\frac{d\varphi}{ds},$$

e derivando di nuovo

$$\frac{d^2u_2}{ds^2} = -\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\left[\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right] \quad \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\frac{d^2\theta}{ds^2} + \cos\theta\cos\varphi\frac{d^2\varphi}{ds^2} -$$
$$- 2\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\frac{d\theta}{ds}\frac{d\varphi}{ds}.$$

Poi è

$$\frac{du_3}{ds} = \cos\theta\frac{d\theta}{ds}$$

e derivando ancora

$$\frac{d^2u_3}{ds^2} = -\operatorname{sen}\theta\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \cos\theta\,\frac{d^2\theta}{ds^2}.$$

Dalla prima delle (1) si ha

$$R = \sqrt{\left(\frac{du_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{du_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{du_3}{ds}\right)^2},$$

e, sostituendo i valori trovati,

(2) $$R = \sqrt{\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \cos^2\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}.$$

Dalle (1) si ha poi

$$T = -\frac{D}{R^2},$$

dove

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \dfrac{du_1}{ds} & \dfrac{du_2}{ds} & \dfrac{du_3}{ds} \\ \dfrac{d^2u_1}{ds^2} & \dfrac{d^2u_2}{ds^2} & \dfrac{d^2u_3}{ds^2} \end{vmatrix},$$

e, sostituendo i valori trovati,

$$T = -\frac{\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\left(\dfrac{d\varphi}{ds}\right)^3 + \cos\theta\left(\dfrac{d^2\theta}{ds^2}\dfrac{d\varphi}{ds} - \dfrac{d^2\varphi}{ds^2}\dfrac{d\theta}{ds}\right) + 2\operatorname{sen}\theta\left(\dfrac{d\theta}{ds}\right)^2\dfrac{d\varphi}{ds}}{\left(\dfrac{d\theta}{ds}\right)^2 + \cos^2\theta\left(\dfrac{d\varphi}{ds}\right)^2},$$

che, servendoci della (2), possiamo scrivere

(3) $$T = -\operatorname{sen}\theta\,\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{R^2}\left[\cos\theta\left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\frac{d\varphi}{ds} - \frac{d^2\varphi}{ds^2}\frac{d\theta}{ds}\right) + \operatorname{sen}\theta\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2\frac{d\varphi}{ds}\right].$$

Tra la (2) e la (3) eliminiamo φ.

Dalla (2) si ha

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\cos\theta}\sqrt{R^2 - \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2}$$

e, derivando rispetto ad s,

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\sqrt{R^2 - \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2}\cdot\frac{d\theta}{ds} + \frac{R\dfrac{dR}{ds} - \dfrac{d\theta}{ds}\dfrac{d^2\theta}{ds^2}}{\cos\theta\sqrt{R^2 - \left(\dfrac{d\theta}{ds}\right)^2}}.$$

Sostituendo nella (3) si ha

(4) $$T\sqrt{R^2 - \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2} = -\frac{d^2\theta}{ds^2} + \operatorname{tang}\theta\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \frac{1}{R}\frac{dR}{ds}\frac{d\theta}{ds} - R^2\operatorname{tang}\theta.$$

Con un cambiamento di variabile

(5) $$s = s(t)$$

l'equazione differenziale (4) diventa

$$T\frac{ds}{dt}\sqrt{\left(R\frac{ds}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} = -\frac{d^2\theta}{dt^2} + \operatorname{tang}\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \\ + \frac{1}{R\frac{ds}{dt}}\frac{d}{dt}\left(R\frac{ds}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt} - \left(R\frac{ds}{dt}\right)^2\operatorname{tang}\theta;$$

la quale, posto

(6) $$R_1 = R\frac{ds}{dt}, \qquad T_1 = T\frac{ds}{dt},$$

diventa un'equazione differenziale dello stesso tipo della (4).

Se il cambiamento di variabile (5) è tale da risultare $R_1 = 1$, allora per la prima delle (6) sarà

$$R_1 = R\frac{ds}{dt} = 1$$

cioè

(7) $$t = \int R(s)ds.$$

Con questo cambiamento di variabile la (4) diviene

(8) $$T_1\sqrt{1 - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} = -\frac{d^2\theta}{dt^2} + \operatorname{tang}\theta\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 1\right].$$

Cambiamo la funzione incognita ponendo

(9) $$y = \operatorname{sen}\theta.$$

Allora è

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}; \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}}; \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{y''(1-y^2) + yy'^2}{(1-y^2)\sqrt{1-y^2}}$$

e l'equazione differenziale (8) diviene

(10) $$T_1\sqrt{1 - y^2 - y'^2} = -y'' - y.$$

Supponiamo di conoscere un integrale y_1 di questa equazione.

Faremo vedere che posto

(11) $$y = \sqrt{1 - y_1^2}\cdot z$$

dove z soddisfa alla equazione differenziale del prim' ordine:

(12) $$z^2 + \frac{(1 - y_1^2)^2}{1 - y_1^2 - y_1'^2} z'^2 = 1$$

la (11) risulta un integrale della (10).

Infatti dalla (11) derivando

$$y' = z'\sqrt{1 - y_1^2} - \frac{y_1 y_1'}{\sqrt{1 - y_1^2}} z,$$

$$y'' = z''\sqrt{1 - y_1^2} - 2\frac{y_1 y_1'}{\sqrt{1 - y_1^2}} z' - \frac{y_1 y_1''(1 - y_1^2) + y_1'^2}{(1 - y_1^2)\sqrt{1 - y_1^2}} z,$$

e, sostituendo nella (10),

(10′)

$$\mathrm{T}_1(1 - y_1^2)\sqrt{-(1 - y_1^2)z'^2 + 2y_1 y_1'(1 - y_1^2)zz' - [(1 - y_1^2)^2 + y_1^2 y_1'^2]z^2 + (1 - y_1^2)} =$$
$$= -(1 - y_1^2)^2 z'' + 2y_1 y_1'(1 - y_1^2)z' + [(1 - y_1^2)\{y_1 y_1'' - (1 - y_1^2)\} + y_1'^2]z.$$

Dalla (12) derivando si ricava

$$(12') \qquad z'' = -\frac{(1 - y_1^2)(y_1' y_1'' - y_1 y_1\ ) + 2y_1 y_1'^3}{(1 - y_1^2 - y_1'^2)(1 - y_1^2)} z' - \frac{1 - y_1^2 - y_1'^2}{(1 - y_1^2)^2} z,$$

mentre dalla (12) stessa si ha:

$$(12'') \qquad z' = \frac{\sqrt{1 - y_1^2 - y_1'^2}}{1 - y_1^2}\sqrt{1 - z^2}.$$

Sostituendo nella (10′) a z' e z'' questi valori otteniamo:

$$T_1(1 - y_1^2 - y_1'^2) \times$$
$$\times \sqrt{[y_1^2(1 - y_1^2) - y_1'^2(1 + y_1^2)]z^2 + 2y_1 y_1'\sqrt{1 - y_1^2 - y_1'^2}\cdot z\sqrt{1 - z^2} + y_1'^2} =$$
$$= (y_1 + y_1'')[y_1'\sqrt{1 - y_1^2 - y_1'^2}\sqrt{1 - z^2} + y_1(1 - y_1^2 - y_1'^2)z].$$

Quadrando e semplificando

$$T_1^2(1 - y_1^2 - y_1'^2) = (y_1 + y_1'')^2.$$

Resta quindi provato che la (11) è un integrale dell'equazione differenziale (10) se z soddisfa alla (12).

Conosciamo così due integrali della (10)

$$y_1 \qquad \text{ed} \qquad y_2 = \sqrt{1 - y_1^2}\cdot z.$$

Questi sono anche integrali dell'equazione differenziale lineare omogenea del terz'ordine

$$(13) \qquad \frac{T_1'}{T_1}(y'' + y) - T_1^2 y' = y''' + y'$$

ottenuta quadrando e derivando la (10)

Una loro combinazione lineare a coefficienti costanti

$$(14) \qquad y = \alpha y_1 + \beta\sqrt{1 - y_1^2}\cdot z$$

è un integrale della (13), ma in generale non lo è della (10).

Vogliamo trovare la condizione cui debbono soddisfare α e β perchè la (14) sia integrale della (10).

Derivando la (14) otteniamo

$$y' = \alpha y_1' + \beta \sqrt{1 - y_1^2}\, z' - \beta \frac{y_1 y_1'}{\sqrt{1 - y_1^2}}\, z,$$

$$y'' = \alpha y_1'' + \beta \sqrt{1 - y_1^2} \cdot z'' - 2\beta \frac{y_1 y_1'}{\sqrt{1 - y_1^2}}\, z' - \beta \frac{y_1 y_1''(1 - y_1^2) + y_1'^2}{(1 - y_1^2)\sqrt{1 - y_1^2}}\, z.$$

Elevando la (10) al quadrato e sostituendo i valori trovati per y' e y'' tenendo conto delle (12') e (12''), otteniamo

$$T_1^2 \{ 1 - \alpha^2(y_1^2 + y_1'^2) - \beta^2 \} = T_1^2(1 - y_1^2 - y_1'^2)\alpha^2.$$

Da cui semplificando:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1. \tag{15}$$

Dalla (12), separando le variabili, si ha

$$\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{\sqrt{1 - y_1^2 - y_1'^2}}{1 - y_1^2}\, dt$$

ed integrando

$$\operatorname{arcsen} z = \int_0^t \frac{\sqrt{1 - y_1^2 - y_1'^2}}{1 - y_1^2}\, dt + c, \tag{16}$$

da cui

$$z = \operatorname{sen}\left[\int_0^t \frac{\sqrt{1 - y_1^2 - y_1'^2}}{1 - y_1^2}\, dt + c\right]. \tag{17}$$

Quindi, in definitiva, se conosciamo un integrale y_1 della (10), possiamo formarci l'integrale generale che ci è dato dalla (14) con z dato dalla (17).

Nella (14) figurano infatti due costanti arbitrarie di cui una è la c. che figura nella z, mentre α e β dovendo soddisfare alla (15) si riducono ad una sola costante arbitraria.

Giacchè $y = \operatorname{sen} \theta$, dalla (14) si ha:

$$\theta = \operatorname{arcsen} (\alpha \operatorname{sen} \theta_1 + \beta \cos \theta_1 \cdot z) \tag{18}$$

dove θ_1 è un integrale noto della (8) e dove z ci è data dalla seguente equazione differenziale

$$z^2 + \frac{\cos^2 \theta_1}{1 - \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2}\, z'^2 = 1. \tag{19}$$

Ritornando alla variabile s questa diventa

$$z^2 + \frac{\cos^2 \theta_1}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \left(\frac{d\theta_1}{ds}\right)^2}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \tag{19'}$$

cioè, per la (7),

$$z^2 + \frac{\cos^2 \theta_1}{R^2 - \left(\frac{d\theta_1}{ds}\right)^2}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \tag{19''}$$

da cui integrando

$$z = \operatorname{sen}\left(\int_0^s \frac{\sqrt{R^2 - \left(\frac{d\theta_1}{ds}\right)^2}}{\cos \theta_1}\, ds + c\right). \tag{20}$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale (4) è:

$$\theta = \operatorname{arcsen}\left[\alpha \operatorname{sen} \theta_1 + \beta \cos \theta_1 \operatorname{sen}\left(\int_0^s \frac{\sqrt{R^2 - \left(\frac{d\theta_1}{ds}\right)^2}}{\cos \theta_1}\, ds + c\right)\right],$$

od anche, dovendo α e β essere legate dalla (12), posto

$$\alpha = \operatorname{sen} \gamma,$$

e quindi

$$\beta = \cos \gamma,$$

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \theta_1 + \cos \gamma \cos \theta_1 \operatorname{sen}\left(\int_0^s \frac{\sqrt{R^2 - \left(\frac{d\theta_1}{ds}\right)^2}}{\cos \theta_1}\, ds + c\right). \tag{21}$$

Posto

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \theta'; \qquad \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_1'; \qquad \gamma = \frac{\pi}{2} - \gamma'; \qquad c = c' + \frac{\pi}{2}$$

la (21) diviene

$$\cos \theta' = \cos \gamma' \cos \theta_1' + \operatorname{sen} \gamma' \operatorname{sen} \theta_1' \cos\left(\int_0^s \frac{\sqrt{R^2 - \left(\frac{d\theta_1'}{ds}\right)^2}}{\operatorname{sen} \theta_1'}\, ds + c'\right).$$

Questa formula è analoga alla formula di trigonometria sferica

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

dove a, b, c sono i lati di un triangolo sferico ed A è l'angolo op-posto al primo lato. Nel nostro caso è

$$a = \theta', \qquad b = \gamma', \qquad c = \theta_1',$$

$$A = \int_0^s \frac{\sqrt{R^2 - \left(\frac{d\theta_1'}{ds}\right)^2}}{\operatorname{sen} \theta_1'} ds + c'.$$

Da ciò si deduce una facile costruzione geometrica dell'integrale θ. noti θ_1 e le costanti arbitrarie γ e c.

L'equazione differenziale del terzo ordine (13) ammette tre integrali la cui somma dei quadrati è uno. Infatti i suoi coefficienti verificano la relazione

$$(22) \qquad 2\left(-2p^3 - 9pp' + 9pq - \frac{9}{2}p'' + \frac{27}{q'} - 27r\right) \cdot$$
$$\left(2p^2r' - \frac{2}{3}pp'r + 4pqr + 3pr'' + 2p'r' - p''r + 4qr' + 6q'r - 4r^2 + r'''\right) -$$
$$- 2\left(\frac{4}{9}p^2r + \frac{7}{3}pr' - \frac{1}{3}p'r + 4qr + r''\right) \cdot$$
$$\left(-6p^2p' - 9pp'' + 9pq' - 9p'^2 + 9p'q - \frac{9}{2}p''' + \frac{27}{2}q'' - 27r'\right) = 0$$

che facilmente si dimostra essere necessaria e sufficiente affinchè la equazione differenziale

$$(23) \qquad y''' + py'' + qy' + ry = 0$$

ammetta tre integrali la cui somma dei quadrati è uno,

Faremo ora vedere che una equazione differenziale (23) i cui coefficienti siano legati dalla (22) si può sempre con un opportuno cambiamento della variabile ridurre al tipo (13).

Intanto se l'equazione differenziale (23) ammette tre integrali la cui somma dei quadrati è uno, è facile vedere che è possibile trovare due funzioni $\rho(t)$, $\tau(t)$ per le quali risulta

$$(24) \quad \begin{cases} 2\frac{\rho'}{\rho} + \frac{\tau'}{\tau} = -p \\ -\frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2} + \rho^2 + \tau^2 + 2\left(\frac{d}{dt}\log\rho\right)^2 + \frac{d}{dt}\left(\log\rho\right)\frac{d}{dt}\left(\log\tau\right) = q \\ \rho\rho' - \rho^2\frac{\tau'}{\tau} = r. \end{cases}$$

Sommiamo alla terza delle (24) la prima moltiplicata per ρ^2

$$3\rho\rho' = r - \rho^2 p,$$

cioè

$$\frac{d\rho^2}{dt} + \frac{2}{3}p\rho^2 = \frac{2}{3}r,$$

che integrata dà

$$\rho^2 = \frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3}\int_{t_0}^{t} p\,dt} \left[\int_{t_0}^{t} r e^{\frac{2}{3}\int_{t_0}^{t} p\,dt} dt + c_1 \right].$$

Da questa si ricava

$$\rho\rho' = \frac{r}{3} - \frac{2}{9} p e^{-\frac{2}{3}\int_{t_0}^{t} p\,dt} \left[\int_{t_0}^{t} r e^{\frac{2}{3}\int_{t_0}^{t} p\,dt} dt + c_1 \right].$$

Sostituendo nella terza delle (24):

$$\frac{\tau'}{\tau} = - \frac{r e^{\frac{2}{3}\int_{t_0}^{t} p\,dt}}{\int_{t_0}^{t} r e^{\frac{2}{3}\int_{t_0}^{t} p\,dt} dt + c_1} - \frac{p}{3},$$

ed integrando

$$\tau = \frac{c_2}{\int_{t_0}^{t} r e^{\frac{2}{3}\int_{t_0}^{t} p\,dt} dt + c_1} e^{-\frac{1}{3}\int_{t_0}^{t} p\,dt}.$$

Per le ipotesi fatte il coefficiente q della (23) soddisfa alla equazione differenziale del secondo ordine (22); d'altra parte se si forma la funzione

$$q_1 = - \frac{1}{\rho} \frac{d^2\rho}{dt^2} + \rho^2 + \tau^2 + 2\left(\frac{d}{dt} \log \rho\right)^2 + \frac{d}{dt}\left(\log \rho\right) \frac{d}{dt}\left(\log \tau\right)$$

in cui ρ e τ abbiano i valori trovati, anche questa soddisfa alla stessa equazione (22) anzi contenendo due costanti arbitrarie c_1 e c_2 ne è l'integrale generale. Fissando opportunamente le costanti c_1 e c_2 risulterà $q_1 = q$; in altri termini si possono fissare c_1 e c_2 in modo che si abbiano le (24).

Facciamo ora sulla (23) un cambiamento di variabile $x = \varphi(t)$: si avrà una nuova equazione differenziale

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \bar{p} \frac{d^2y}{dx^2} + \bar{q} \frac{dy}{dx} + \bar{r} y = 0,$$

in cui

$$\bar{p} = 3\frac{\varphi''}{\varphi'^2} + \frac{p}{\varphi'}; \qquad \bar{q} = \frac{\varphi'''}{\varphi'^3} + p\frac{\varphi''}{\varphi'^3} + q\frac{1}{\varphi'^2}; \qquad r = \frac{r}{\varphi'^3}.$$

Per questa nuova equazione possiamo operare come per la precedente e trovare le due funzioni $\bar{\rho}$ e $\bar{\tau}$. Risulta

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\varphi'}, \qquad \bar{\tau} = \frac{\tau}{\varphi'}. \tag{25}$$

Infatti si verifica che si ha:

$$2\frac{\frac{d\bar{\rho}}{dx}}{\bar{\rho}} + \frac{\frac{d\bar{\tau}}{dx}}{\bar{\tau}} = -3\frac{\varphi''}{\varphi'^2} - \frac{p}{\varphi'}; \quad \bar{\rho}\frac{d\bar{\rho}}{dx} - \bar{\rho}^2\frac{\frac{d\bar{\tau}}{dx}}{\bar{\tau}} = \frac{r}{\varphi'^3}; \quad -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{d^2\bar{\rho}}{dx^2} + \bar{\rho}^2 + \bar{\tau} +$$
$$+ 2\left(\frac{d}{dx}\log\bar{\rho}\right)^2 + \frac{d}{dx}\left(\log\bar{\rho}\right)\frac{d}{dx}\left(\log\bar{\tau}\right) = \frac{\varphi'''}{\varphi'^3} + p\frac{\varphi''}{\varphi'^3} + \frac{q}{\varphi'^2}$$

quando al posto di $\bar{\rho}$ e $\bar{\tau}$ si pongano le (25).

Fissando il cambiamento della variabile ponendo $\varphi'(t) = \rho(t)$ risulterà $\bar{\rho} = 1$ e le (24) per la nuova variabile diverranno

$$-\bar{p} = \frac{\frac{d\bar{\tau}}{dx}}{\bar{\tau}}: \qquad \bar{q} = 1 + \bar{\tau}^2; \qquad -\bar{r} = \frac{\frac{d\bar{\tau}}{dx}}{\bar{\tau}}.$$

Quindi con sole quadrature con un cambiamento della variabile si può ridurre una equazione differenziale (23), che ammetta tre integrali la cui somma dei quadrati è uno, alla forma (13).