
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIO VILLA

Direzioni d'osculazione e d'iperosculazione di due trasformazioni puntuali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 2
(1947), n.3, p. 188–195.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_3_188_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Direzioni d'osculazione e d'iperosculazione di due trasformazioni puntuali.

Nota di MARIO VILLA (a Bologna) (*).

Sunto. - *Si dimostra che: Date fra due spazi S_r, S'_r due trasformazioni puntuali T_1, T_2 aventi in una coppia regolare (O, O') lo stesso intorno d'ordine $s > 0$, esistono, in generale, $\frac{(s+1)r-1}{s} E_1$ di centro O (opp. O') per i quali ogni E_{s+1} contenente quell' E_1 è mutato sia da T_1 che da T_2 nello stesso E_{s+1} . Si danno inoltre alcune applicazioni del risultato ottenuto.*

1. Fra due spazi lineari $S, S' (r-1)$ si considerano due trasformazioni puntuali T_1, T_2 nelle quali al punto O di S , corrisponde lo stesso punto O' di S' ; la coppia (O, O') essendo regolare (cioè

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

a Jacobiano $\neq 0$) sia per T_1 che per T_2 . Si dimostra nel n. 2 che se T_1, T_2 sono *tangenti* in (O, O') ⁽¹⁾, esistono $2^r - 1$ direzioni per O (per O'), che si diranno *direzioni d'osculazione*, lungo le quali le due trasformazioni si osculano.

Segue (n. 3) una nuova definizione per le direzioni caratteristiche (o inflessionali) di una trasformazione puntuale: *sono le direzioni d'osculazione della trasformazione puntuale data e di una (qualunque) delle sue ∞^r omografie tangenti.*

Più in generale, nel n. 4 si dimostra che se T_1 e T_2 hanno in (O, O') lo stesso intorno d'ordine $s (\geq 1)$ esistono $\frac{(s+1)^r - 1}{s}$ direzioni per O , per O' , che si diranno (per $s > 1$) *direzioni d'iperosculazione*, lungo le quali le due trasformazioni s'approssimano fino all'intorno d'ordine $s + 1$.

Infine nel n. 5 si danno del teorema del n. 4 due applicazioni: l'una ad una trasformazione puntuale T avente in una coppia regolare (O, O') le direzioni caratteristiche indeterminate, pervenendo alla considerazione di certe $\frac{3^r - 1}{2}$ direzioni analoghe alle direzioni caratteristiche del caso ordinario; l'altra alle trasformazioni cremoniane (costruite mediante r reciprocità) osculatrici una trasformazione data in una coppia regolare di punti corrispondenti.

2. Direzioni d'osculazione di due trasformazioni puntuali tangenti. — Si ha:

Date fra due spazi S_r, S'_r due trasformazioni puntuali T_1, T_2 tangenti in una coppia regolare (O, O') , esistono, in generale, $2^r - 1 E_1$ di centro O (opp. O') per i quali ogni E_2 contenente quell' E_1 è mutato sia da T_1 che da T_2 nello stesso E_2 .

Essendo T_1, T_2 tangenti in (O, O') determinano fra le direzioni uscenti da O e quelle uscenti da O' una stessa proiettività (non degenera) ω . Assumiamo in S_r, O come origine delle coordinate (proiettive non omogenee) $x_1, x_2, \dots, x_r$; in S'_r assumiamo O' come origine delle coordinate e come assi $y_1, y_2, \dots, y_r$ e come retta $y_1 = y_2 = \dots = y_r$ risp. le corrispondenti in ω degli assi $x_1, x_2, \dots, x_r$ e della retta $x_1 = x_2 = \dots = x_r$.

Le equazioni di T_1 sono quindi del tipo

$$2.1 \quad y_i = ax_i + f_i(x_1, x_2, \dots, x_r) + [3] \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

e quelle di T_2

$$2.2 \quad y_i = ax_i + \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_r) + [3].$$

(1) Due trasformazioni puntuali si dicono *tangenti* in una coppia (O, O') quando hanno ivi lo stesso intorno del 1° ordine; si dice che *si osculano* in (O, O') quando hanno ivi lo stesso intorno del 2° ordine.

dove a è una costante $\neq 0$ e f_i, φ_i sono polinomi omogenei di 2° grado in $x_1, x_2, \dots, x_r$; con [3] si indicano i termini negli sviluppi di grado > 2 .

All' E_2' di centro O'

$$y_t = m_t y_1 + \bar{p}_t y_1^2 \quad (t = 2, \dots, r)$$

corrisponde in T_1 l' E_2 (di centro O)

$$x_t = m_t x_1 + p_t x_1^2,$$

dove

$$p_t = a \bar{p}_t + \frac{1}{a} [m_t f_1(1, m_2, \dots, m_r) - f_t(1, m_2, \dots, m_r)].$$

In T_2 all' E_2' corrisponde l' E_2^*

$$x_t = m_t x_1 + p_t^* x_1^2,$$

dove

$$p_t^* = a \bar{p}_t + \frac{1}{a} [m_t \varphi_1(1, m_2, \dots, m_r) - \varphi_t(1, m_2, \dots, m_r)].$$

Affinchè l' E_2 e l' E_2^* coincidano deve essere $p_t = p_t^*$ ossia

$$2.3 \quad m_t f_1(1, m_2, \dots, m_r) - f_t(1, m_2, \dots, m_r) = m_t \varphi_1(1, m_2, \dots, m_r) - \varphi_t(1, m_2, \dots, m_r).$$

Gli E_1 (le direzioni) per O soddisfacenti alla condizione richiesta hanno le equazioni $x_t = m_t x_1$ dove gli m_t soddisfano alla 2.3.

Le equazioni complessive di queste direzioni si ottengono quindi ponendo nelle 2.3 $m_t = \frac{x_t}{x_1}$ e sono quindi

$$2.4 \quad x_t f_1(x_1, x_2, \dots, x_r) - x_1 f_t(x_1, x_2, \dots, x_r) = x_t \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_r) - x_1 \varphi_t(x_1, x_2, \dots, x_r).$$

Le 2.4 possono anche scriversi

$$x_t(f_1 - \varphi_1) - x_1(f_t - \varphi_t) = 0,$$

od anche

$$\left| \begin{array}{c} f_t - \varphi_t \\ x_t \end{array} \right| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Per una ben nota formula di SALMON ⁽²⁾, si ha poi che il numero di tali direzioni è, in generale, $2^r - 1$.

Le direzioni in discorso si diranno *direzioni d'osculazione* di T_1, T_2 in (O, O') . Per $r=2$, le coppie di direzioni d'osculazione sono quindi 3, mentre sono 7 per $r=3$, ecc.

(2) Si veda ad es. C. SEGRE: *Mehrdimensionale Raume*, « Encykl. der Math. Wiss. », Bd. III, T. 2, Teubner, Berlin, 1921-1928, p. 929.

3. Nuova definizione delle direzioni caratteristiche di una trasformazione puntuale. — La nozione ora introdotta di direzioni d'osculazione di due trasformazioni puntuali permette di dare una nuova definizione delle direzioni caratteristiche di una trasformazione puntuale T nella coppia (regolare) (O, O') ⁽³⁾.

Esistono ∞^r omografie tangenti a T in (O, O') . Orbene, si ha:

Le direzioni caratteristiche di T in (O, O') , sono le direzioni d'osculazione di T e di una delle sue omografie tangenti in (O, O') .

Infatti in un'omografia ad un E_2 di flesso corrisponde sempre un E_2 di flesso, sicchè le direzioni d'osculazione fra T e una delle sue omografie tangenti sono quelle che conservano le inflessioni, cioè sono le direzioni caratteristiche. La proprietà del resto si conferma subito anche analiticamente.

La trasformazione puntuale T sia rappresentata in (O, O') dalle equazioni:

$$y_i = ax_i + f_i(x_1, \dots, x_r) + [3],$$

dove f_i conserva il significato precedente.

Le ∞^r omografie tangenti in (O, O') a T hanno le equazioni:

$$3.1 \quad y_i = \frac{ax_i}{\sum_k \lambda_k x_k + 1} \quad (i, k = 1, \dots, r)$$

dipendenti dagli r parametri λ_i .

Sviluppando le funzioni dei secondi membri delle 3.1 in serie di potenze nell'intorno di O si ottiene

$$y_i = ax_i + \varphi_i + [3],$$

dove

$$\varphi_i = -ax_i (\sum_k \lambda_k x_k).$$

Sostituendo nelle 2.4 a φ_i queste espressioni, i secondi membri divengono identicamente nulli, e le direzioni d'osculazione si riducono quindi alle direzioni caratteristiche di T

$$\left| \frac{f_i}{x_i} \right| = 0 \quad (4).$$

(3) Nella teoria delle trasformazioni puntuali le direzioni caratteristiche compiono un ruolo assai importante. Si veda: VILLA, *Trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*. I. *Intorno del 2° ordine*, « Rend. dell'Acc. dei Lincei », Ser. VIII, 1947-48.

A questo lavoro rimandiamo anche per le citazioni bibliografiche.

(4) Non mi trattengo sulle relazioni che intercedono fra le direzioni d'osculazione di due trasformazioni puntuali T_1, T_2 tangenti in (O, O') e le direzioni caratteristiche di T_1 e quelle di T_2 , legami che analiticamente sono indicati dalle 2.4 le quali porgono le equazioni delle direzioni d'oscu-

4. Direzioni d'iperosculazione di due trasformazioni puntuali aventi lo stesso intorno d'ordine s . - Il teorema del n. 2 è caso particolare del seguente:

Date fra due spazi S_r, S_r' due trasformazioni puntuali T_1, T_2 aventi in una coppia regolare (O, O') lo stesso intorno d'ordine $s > 0$, esistono, in generale, $\frac{(s+1)^r - 1}{s} E_1$ di centro O (opp. O') per i quali ogni E_{s+1} contenente quell' E_1 è mutato sia da T_1 che da T_2 nello stesso E_{s+1} .

Assumendo O, O' come origini delle coordinate nei rispettivi spazi e in S_r' come assi $y_1, y_2, \dots, y_r$ e retta $y_1 = y_2 = \dots = y_r$, risp. le corrispondenti nella proiezione ω (n. 2) degli assi $x_1, x_2, \dots, x_r$ e della retta $x_2 = x_3 = \dots = x_r$, le equazioni di T_1 sono del tipo

$$4.1 \quad y_i = ax_i + f_{2,i} + \dots + f_{s,i} + f_{s+1,i} + [s+2] \quad (i=1, 2, \dots, r)$$

e quelle di T_2

$$y_i = ax_i + f_{2,i} + \dots + f_{s,i} + \varphi_{s+1,i} + [s+2]$$

dove a è una costante $\neq 0$, $f_{2,i}, \dots, f_{s,i}$ sono polinomi omogenei in $x_1, \dots, x_r$ risp. di grado $2, \dots, s$ e $f_{s+1,i}, \varphi_{s+1,i}$ sono polinomi omogenei in $x_1, \dots, x_r$ di grado $s+1$; infine con $[s+2]$ si indicano i termini negli sviluppi di grado $> s+1$.

Dato un E'_{s+1} di centro O' di equazioni:

$$4.2 \quad y_t = m_t y_1 + \bar{p}_{2,t} y_1^2 + \dots + \bar{p}_{s,t} y_1^s + \bar{p}_{s+1,t} y_1^{s+1} \quad (t=2, \dots, r),$$

l' E_{s+1} , che gli corrisponde in T_1 ha equazioni del tipo

$$4.3 \quad x_t = m_t x_1 + p_{2,t} x_1^2 + \dots + p_{s,t} x_1^s + p_{s+1,t} x_1^{s+1}.$$

Per calcolare i coefficienti $p_{1,t}, \dots, p_{s,t}, p_{s+1,t}$, occorre sostituire nelle 4.2 le 4.1 e poi sostituire nelle relazioni ottenute le 4.3.

Nel fare questo calcolo si possono trascurare i termini in cui non appaiono nè i coefficienti delle $f_{s+1,i}$, nè $p_{s+1,t}$. Ciò, in quanto, i termini che si trascurano apparirebbero immutati anche nel calcolo analogo dell' E^*_{s+1} corrispondente in T_2 all' E'_{s+1} considerato.

lazione, mentre annullandone i primi membri si hanno le equazioni delle direzioni caratteristiche di T_1 e annullandone i secondi membri quelle delle direzioni caratteristiche di T_2 .

Per $r=2$, la terna delle direzioni d'osculazione è rappresentata dall'equazione

$$x_2 f_1 - x_1 f_2 = x_2 \varphi_1 - x_1 \varphi_2$$

e appartiene quindi all'involuzione determinata dalle terne di direzioni caratteristiche di T_1, T_2 .

Naturalmente si trascureranno inoltre i termini di grado $> s + 1$ nelle x_i . Si trova

$$ap_{s+1, i} x_1^{s+1} + f_{s+1, i}(1, m_2, \dots, m_r) x_1^{s+1} = m_i f_{s+1, 1}(1, m_2, \dots, m_r) x_1^{s+1}.$$

L' E_{s+1}^* ha le equazioni

$$x_t = m_t x_1 + p_{2, t} x_1^2 + \dots + p_{s, t} x_1^s + p_{s+1, t}^* x_1^{s+1}$$

e il calcolo analogo dei suoi coefficienti porge

$$ap_{s+1, i}^* x_1^{s+1} + \varphi_{s+1, i}(1, m_2, \dots, m_r) x_1^{s+1} = m_i \varphi_{s+1, 1}(1, m_2, \dots, m_r) x_1^{s+1}.$$

Affinchè l' E_{s+1} e E_{s+1}^* coincidano deve essere $p_{s+1, i} = p_{s+1, i}^*$, ossia:

$$\begin{aligned} 4.4 \quad & m_i f_{s+1, 1}(1, m_2, \dots, m_r) - f_{s+1, i}(1, m_2, \dots, m_r) = \\ & = m_i \varphi_{s+1, 1}(1, m_2, \dots, m_r) - \varphi_{s+1, i}(1, m_2, \dots, m_r). \end{aligned}$$

Gli E_i (le direzioni) per O soddisfacenti alla condizione richiesta hanno le equazioni $x_t = m_t x_1$ dove gli m_t soddisfano alle 4.4.

Le equazioni complessive di queste direzioni si ottengono quindi ponendo nelle 4.4 $m_t = \frac{x_t}{x_1}$ e sono quindi

$$\begin{aligned} 4.5 \quad & x_i f_{s+1, 1}(x_1, x_2, \dots, x_r) - x_1 f_{s+1, i}(x_1, \dots, x_r) = \\ & = x_i \varphi_{s+1, 1}(x_1, x_2, \dots, x_r) - x_1 \varphi_{s+1, i}(x_1, x_2, \dots, x_r). \end{aligned}$$

Le 4.5 possono anche scriversi

$$x_i(f_{s+1, 1} - \varphi_{s+1, 1}) - x_1(f_{s+1, i} - \varphi_{s+1, i}) = 0,$$

od anche

$$\left| \frac{f_{s+1, i} - \varphi_{s+1, i}}{x_i} \right| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Per la formula di SALMON già ricordata si ha poi che il numero di tali direzioni è, in generale, $\frac{(s+1)^r - 1}{s}$.

Le direzioni in discorso si diranno (per $s > 1$) *direzioni d'iperoscolazione* di T_1, T_2 in (O, O') .

Per $s = 1$ si ritrova il numero $2^r - 1$ delle coppie di direzioni d'oscolazione. Se le trasformazioni T_1, T_2 si osculano in (O, O') , cioè se $s = 2$, si hanno dunque $\frac{3^r - 1}{2}$ coppie di direzioni d'iperoscolazione (4 per $r = 2$, 13 per $r = 3$, ecc.).

5. Applicazioni. — Un'applicazione notevole del teorema precedente si può fare ad una trasformazione puntuale T avente in

una coppia regolare (O, O') le direzioni caratteristiche indeterminate ⁽⁵⁾.

Allora esiste un'omografia Ω (necessariamente unica) che oscula la trasformazione in (O, O') . Orbene, le trasformazioni T, Ω posseggono per il precedente teorema $\frac{3' - 1}{2}$ coppie di E_1 (di direzioni) d'iperosculazione. Gli E_1 che si sono così posti in luce sono *gli* E_1 per cui un E_3 di flesso di 2^a specie che li contiene viene mutato da T ancora in un E_3 di flesso di 2^a specie. Infatti un'omografia muta gli E_3 di flesso di 2^a specie ancora in E_3 di flesso di 2^a specie.

Le $\frac{3' - 1}{2}$ coppie di direzioni in discorso sono quindi analoghe alle direzioni caratteristiche del caso ordinario e si potrebbero perciò chiamare *direzioni caratteristiche (o inflessionali) di 2^a specie*. Una trasformazione puntuale avente in una coppia (O, O') direzioni caratteristiche indeterminate, possiede dunque 4 per $r = 2$, 13 per $r = 3$, coppie di direzioni caratteristiche di 2^a specie ⁽⁶⁾.

Un'altra applicazione del teorema del n. 4 si può fare alle $\infty^{\frac{r^2(r-1)}{2}}$ trasformazioni cremoniane T_r d'ordine r (costruite mediante r reciprocità) osculatrici in una coppia regolare (O, O') una trasformazione data T ⁽⁷⁾. Ciascuna delle T_r , assieme a T , individua $\frac{3' - 1}{2}$ direzioni d'iperosculazione e al variare della trasformazione cremoniana osculatrice si ottiene così nella stella di centro O (opp. O') un sistema algebrico, in generale, $\infty^{\frac{r^2(r-1)}{2}}$ di gruppi di $\frac{3' - 1}{2}$ rette.

Per $r = 2$ si hanno trasformazioni quadratiche T_2 osculatrici e

⁽⁵⁾ Questo caso è stato considerato in: VILLA, *Sulle direzioni caratteristiche di una trasformazione puntuale*, « Mem. dell'Acc. delle Scienze di Bologna », Ser. IX, vol. X, p. 17, 1942-43.

⁽⁶⁾ Più in generale quando esiste un'omografia Ω avente in (O, O') lo stesso intorno d'ordine $s > 1$ di T , sono individuate da T e Ω $\frac{(s+1)' - 1}{s}$ E_1 (direzioni) d'iperosculazione.

Questi E_1 sono anche quelli per cui un E_{s+1} di flesso di specie s che li contiene viene mutato da T ancora in un E_{s+1} di flesso di specie s e si potrebbero perciò chiamare E_1 caratteristici (o inflessionali) di specie s .

⁽⁷⁾ VILLA, *Trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*. III. *Trasformazioni cremoniane osculatrici*, « Rend. dell'Acc. dei Lincei », Ser. VIII, 1947-48.

si trova l'involuzione, in generale, ∞^2 delle quaterne di rette di iperosculazione considerata dal BOMPIANI ⁽⁸⁾.

Per $r = 3$, si hanno trasformazioni cubiche T_3 osculatrici e si ha nella stella di centro O (opp. O') un sistema algebrico ∞^9 di gruppi di 13 rette, ecc.