
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LANDOLINO GIULIANO

Sulla formula $(\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2 = 1$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 2
(1947), n.3, p. 181–188.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_3_181_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_3_181_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

$$\text{Sulla formula } \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1.$$

Nota di LANDOLINO GIULIANO (a Pisa) (*).

Sunto. - Si dà un esempio di curva continua e rettificabile $x = x(s)$, $y = y(s)$, $(0, L)$ per cui in un suo punto esistano le $\frac{dx}{ds}$ e $\frac{dy}{ds}$ e siano ivi entrambe nulle. Dopo, si dà, più in generale, l'esempio di una curva continua e rettificabile $x = x(s)$, $y = y(s)$, $(0, L)$ per cui le circostanze ora notate valgano in tutti i punti di un insieme E perfetto, dappertutto denso.

Il metodo si estende al caso in cui si voglia che la derivata $\frac{dx}{ds}$ sia eguale a un assegnato numero arbitrario positivo k minore di 1.

Sia C una curva piana continua e rettificabile di estremi P_0 e P_1 e di lunghezza L . Siano $x = x(s)$, $y = y(s)$, $(0, L)$ le sue equazioni parametriche, dove, detto P il punto generico sulla curva, s indica la lunghezza dell'arco $\widehat{P_0P}$.

È noto che ⁽¹⁾ quasi dappertutto sulla curva C esiste la tangente, esistono finite le derivate $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ e valgono le uguaglianze:

$$(1) \quad \frac{dx}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \theta$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$$

dove θ è l'angolo di direzione della tangente alla curva nel punto corrispondente al valore s del parametro.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa.

⁽¹⁾ L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Vol. I. Zanichelli, Bologna 1922, pp. 60-61.

Dall'esistenza delle $\frac{dx}{ds}$ e $\frac{dy}{ds}$ non segue la validità delle (1). PERL ha infatti dato ⁽²⁾ un esempio di una curva continua e rettificabile per la quale in un suo punto esistono le $\frac{dx}{ds}$ e $\frac{dy}{ds}$ e soddisfanno ivi all'uguaglianza $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \frac{4}{\pi^2}$; più in generale, detto k un numero tale che $0 < k < 1$, PERL ha mostrato che si può costruire una curva continua e rettificabile per la quale in un suo punto esistano le $\frac{dx}{ds}$ e $\frac{dy}{ds}$, soddisfacenti ivi all'uguaglianza $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = k^2$. Ha fatto anche vedere che si può costruire la curva continua e rettificabile in modo che in un suo punto esistano le $\frac{dx}{ds}$ e $\frac{dy}{ds}$ e in esso risulti $\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds} = 0$.

Ha poi osservato che col metodo della condensazione delle singolarità può costruirsi una curva continua e rettificabile per cui le circostanze sopra notate sussistano in un insieme di punti dappertutto denso.

La lettura della Nota di PERL mi ha indotto a dare un altro esempio, naturalmente diverso da quello dato dal PERL, di curva continua e rettificabile per la quale in un suo punto esistano le $\frac{dx}{ds}$ e $\frac{dy}{ds}$ e soddisfanno in esso alle relazioni $\frac{dx}{ds} = 0$, $\frac{dy}{ds} = 0$, esempio che, come ho mostrato, si può anche facilmente modificare in modo che, fissato un qualunque numero k tale che $0 < k < \frac{1}{2}$, risulti in un punto della curva $\frac{dx}{ds} = k$, $\frac{dy}{ds} = 0$.

Passo quindi a costruire una curva continua e rettificabile per cui esistano le $\frac{dx}{ds}$ e $\frac{dy}{ds}$ in un insieme perfetto (e quindi non numerabile) di misura nulla dappertutto denso e tale che in tutti i suoi punti valgano le $\frac{dx}{ds} = 0$ e $\frac{dy}{ds} = 0$.

Ho ritenuto di una qualche utilità il far conoscere gli esempi a cui ho sopra accennato.

1. Consideriamo il segmento $(0, 1)$ e su di esso i punti A_{n-1} e A_n tali che sia $OA_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$, supponendo n intero e ≥ 5 . Sul seg-

(2) JULIUS PERL, *Bemerkungen zur Formel* $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$. « Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung », (1909), pp. 399-401.

mento $A_n A_{n-1}$ costruiamo la spezzata ad angoli retti $A_n B'_n B_{n-1} A_{n-1}$, avente il lato $B'_n B_{n-1}$ parallelo al segmento $(0, 1)$, ed avente una lunghezza totale uguale a $\frac{1}{n(n+1)}$. A queste infinite spezzate si aggiunga il segmento rettilineo $A_n A_1 \left(OA_1 = \frac{1}{2} \right)$. Si ha così una curva C continua che congiunge i punti O e A_1 . Questa curva è rettificabile. Infatti la sua lunghezza L è data da:

$$L = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^4} \right) + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = \frac{7}{16} + \frac{1}{5} = \frac{51}{80}.$$

Vogliamo mostrare che nel punto O è $\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds} = 0$.

Poniamo L_n uguale alla lunghezza dell'arco OA_n di C , ossia:

$$L_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots = \frac{1}{n+1} = 0.$$

Abbiamo:

$$\frac{OA_n}{L_n} = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{2^n}$$

e quindi:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{OA_n}{L_n} = 0;$$

Sia ora M un punto qualsiasi della curva C , e m la sua ascissa. Detta L_M la lunghezza dell'arco OM di C , consideriamo il rapporto $\frac{m}{L_M}$. Il punto M , supponendo la sua ascissa minore o eguale di quella di A_n , appartiene ad una spezzata $A_n B'_n B_{n-1} A_{n-1}$. Si supponga che appartenga precisamente a questa. Allora è

$$(2) \quad \frac{m}{L_M} < \frac{OA_n + \frac{1}{2^n}}{L_n} = \frac{OA_n + OA_n}{L_n} = \frac{2OA_n}{L_n}$$

e quindi per la (1):

$$\lim_{M \rightarrow O} \frac{m}{L_M} < 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{OA_n}{L_n} = 0.$$

È dunque dimostrato che in O esiste la derivata $\frac{dx}{ds}$ e che è $\left(\frac{dx}{ds}\right)_O = 0$.

Indichiamo con y_M l'ordinata di M . È y_M minore della lunghezza della poligonale $A_n B_n' B_{n-1} A_{n-1}$, alla quale M appartiene e quindi

$$(3) \quad y_M < \frac{1}{n(n+1)}.$$

È perciò:

$$\frac{y_M}{L_M} < \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{L_n} = \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}$$

dunque

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{y_M}{L_M} = 0.$$

È così dimostrato che la curva C ha nel punto O le sue derivate $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, ambedue nulle.

Osserviamo, prima di proseguire, che dalla disuguaglianza $\frac{y_M}{L_M} < \frac{1}{n}$ si ricava

$$(3') \quad \frac{y_M}{L_M} < \frac{1}{5}$$

la quale vale senza condizione alcuna per M , perchè se l'ascissa di M è maggiore di quella di A_n , è $y_M = 0$.

Modificando leggermente l'esempio ora dato si può fare in modo che, fissato un numero k , tale che $0 < k < \frac{1}{2}$, sia nel punto O :

$\frac{dx}{ds} = k$, $\frac{dy}{ds} = 0$. Basta, invece di costruire sul segmento $A_n A_{n-1}$ la spezzata ad angoli retti $A_n B_n' B_{n-1} A_{n-1}$, diviso il segmento $A_n A_{n-1}$ in n parti uguali, costruire tante spezzate ad angoli retti, analoghe alla $A_n B_n' B_{n-1} A_{n-1}$, una su ciascuna di queste parti, tutte aventi il lato parallelo al segmento $(0, 1)$ alla stessa distanza da tale segmento e in modo che la somma totale delle lunghezze di tali spezzate sia eguale a $\frac{1}{k \cdot 2^n}$.

2. Costruiamo ora sul segmento $(A_1, 1)$ la curva simmetrica della C rispetto alla normale in A_1 al segmento $(0, 1)$. Otterremo così una curva continua e rettificabile che congiunge i punti 0 e 1 nei quali punti è $\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{ds} = 0$. Indicheremo ora con C^* questa curva la cui lunghezza viene data da

$$L = 2 \frac{51}{80} = \frac{51}{40}.$$

Consideriamo l'insieme perfetto E di CANTOR definito sul segmento $(0, 1)$, asportando, da questo intervallo, dapprima i punti *interni* (in senso stretto) all'intervallo $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ di ampiezza $\frac{1}{3}$; poi quelli *interni* agli intervalli di ampiezza $\frac{1}{3^2}$:

$$\left(\frac{0}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2}\right), \quad \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}\right)$$

e così via. Il primo intervallo asportato lo diremo del *primo ordine*, gli altri due del *secondo ordine*, e così via. Gli intervalli asportati si dicono gli *intervalli contigui* dell'insieme E che risulta formato di tutti i punti di $(0, 1)$ rimasti.

Sia δ un intervallo contiguo a E , dell'ordine n . L'ampiezza di tale intervallo è $\frac{1}{3^n}$. Su δ costruiamo la curva C_δ simile alla C , e la cui lunghezza è data da

$$L_\delta = L \cdot \delta = \frac{51}{40} \delta = \frac{51}{40} \frac{1}{3^n}.$$

Costruiamo poi la curva C_δ che si ottiene da C_δ' sostituendo ai lati di C_δ' perpendicolari a δ le loro parti *n-esime* (cioè riducendo le ordinate y sulla curva a $\frac{y}{n}$) e contando poi questi lati verticali, così ridotti, una o più volte, in tutta la loro lunghezza o solo in parte in modo che la parte di C_δ che poggia sopra il segmento analogo ad $A_n A_{n-1}$ abbia la lunghezza che aveva in C_δ' moltiplicata per il fattore $\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{51}{11} - \frac{40}{11}$.

Ne risulta dunque che le ordinate di C_δ sono tutte minori ed uguali (per la (3)) a:

$$\frac{1}{5 \cdot 6} \cdot \delta \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{n \cdot 3^n}.$$

Risulta anche che la lunghezza L_δ di C_δ è data da:

$$\begin{aligned} (4) \quad L_\delta &= \delta + (L_\delta' - \delta) \left\{ \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{51}{11} - \frac{40}{11} \right\} = \delta + \delta(L - 1) \left\{ \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{51}{11} - \frac{40}{11} \right\} = \\ &= \delta + \delta \frac{11}{40} \left\{ \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{51}{11} - \frac{40}{11} \right\} = \frac{1}{3^n} \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{51}{40} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{51}{40} \delta. \end{aligned}$$

L'insieme delle curve C_δ costituisce una curva C^* continua, rettificabile, che congiunge i punti estremi del segmento $(0, 1)$ e contiene tutti i punti dell'insieme E . È evidente che la C^* è con-

tinua; essa è poi rettificabile. Infatti la sua lunghezza è data da:

$$\begin{aligned} L^* = \Sigma L_\delta &= \frac{51}{40} \left\{ \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{2}{3^2} \left(\frac{4}{3} \right)^2 + \frac{2^2}{3^3} \left(\frac{4}{3} \right)^3 + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n} \left(\frac{4}{3} \right)^n + \dots \right\} = \\ &= \frac{17}{30} \left\{ 1 + \left(\frac{8}{9} \right) + \left(\frac{8}{9} \right)^2 + \dots + \left(\frac{8}{9} \right)^n + \dots \right\} = \frac{51}{10}. \end{aligned}$$

I punti di E sono tutti punti di accumulazione di archi C_δ , dunque appartengono anch'essi alla curva C^* ; non solo, ma se P è un punto di E , sulla normale per P al segmento $(0, 1)$ non vi è che il punto P stesso che appartenga alla C^* .

Vogliamo mostrare che nei punti di E esistono sempre le derivate $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ e sono sempre ambedue nulle.

3. Sia P un punto di E che non appartenga, come estremo, ad alcun intervallo contiguo all'insieme E stesso. Sia poi P^* un altro punto qualsiasi di C^* . Indichiamo con h la differenza fra l'ascissa di P^* e quella di P e con L_P^* e $L_{P^*}^*$, rispettivamente, le lunghezze degli archi $\widehat{OP}$ e $\widehat{OP^*}$ di C^* . Sia P_1^* la proiezione ortogonale di P^* sul segmento $(0, 1)$ e sia poi P' l'ultimo punto di E che si trova in PP_1^* , oppure il primo a seconda che P_1^* è alla destra oppure alla sinistra di P . Sia infine n l'ordine più basso degli intervalli contigui a E che hanno punti sul segmento PP_1^* . Consideriamo il rapporto:

$$\frac{h}{L_{P^*}^* - L_P^*} = \frac{PP_1^*}{|L_{P'}^* - L_P^*| + |L_P^* - L_{P'}^*|}.$$

Abbiamo, indicando con δ' gli intervalli contigui a E interni a PP' :

$$L_{P'}^* - L_P^* = \Sigma L_{\delta'},$$

e poichè n è l'ordine più basso di tali intervalli contigui, si ha per la (4):

$$L_{P'}^* - L_P^* > \left(\frac{4}{3} \right)^n \frac{51}{40} \Sigma \delta' = \left(\frac{4}{3} \right)^n \frac{51}{40} \overline{PP'}.$$

L'intervallo $P'P_1^*$ fa parte di un intervallo contiguo a E , $P'P''$ (almeno dell'ordine n). Sia P_2 un punto di $(0, 1)$ tale che $P'P_2 = \frac{1}{16} \overline{P'P_1^*}$. La parte di $C_{\delta'} \equiv C'_{P'P''}$ che corrisponde a $P'P_2$ ha una lunghezza maggiore di $\frac{51}{40} P'P_2 = \frac{51}{40} \frac{1}{16} P'P_1^*$. Nel passare da $C_{\delta'}$ a C_δ questa lunghezza viene moltiplicata per un numero mag-

giore di $\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{51}{11} - \frac{40}{11}$. Abbiamo dunque:

$$L_P^* - L_{P'}^* > P'P_1^* \left\{ \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{51}{11} - \frac{40}{11} \right\}$$

e perciò:

$$\begin{aligned} \frac{h}{L_{P^*}^* - L_P^*} &= \frac{\overline{PP_1^*}}{L_{P^*}^* - L_P^*} < \frac{\overline{PP_1^*}}{\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{51}{40} \overline{PP'} + \frac{1}{16} \frac{51}{40} \left\{ \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{51}{11} - \frac{40}{11} \right\} \overline{P'P_1^*}} < \\ &< \frac{\overline{PP_1^*}}{\frac{1}{16} \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{51}{40} \frac{51}{11} (\overline{PP'} + \overline{P'P_1^*}) - \frac{1}{16} \frac{51}{11} \overline{P'P_1^*}} < \frac{16 \cdot 11}{51 \cdot 51 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n - 51} \end{aligned}$$

e si conclude che è:

$$\lim_{P^* \rightarrow P} \frac{h}{L_{P^*}^* - L_P^*} = 0,$$

perchè al tendere di P^* a P , n (minimo ordine degli intervalli contigui a E che trovansi in tutto o in parte in PP^*) tende a ∞ . È dunque in P : $\frac{dx}{ds} = 0$. E questo risultato vale evidentemente anche se P è l'estremo di un intervallo contiguo a E .

4. Passiamo ora alla considerazione della derivata $\frac{dy}{ds}$. Si riprenda il punto P del n. precedente e con esso il punto P^* . Indichiamo con p^* l'ordinata di P^* e consideriamo il rapporto:

$$\frac{p^*}{L_{P^*}^* - L_P^*}.$$

Abbiamo:

$$(5) \quad \frac{p^*}{L_{P^*}^* - L_P^*} < \frac{p^*}{L_{P^*}^* - L_{P'}^*}.$$

Ora osserviamo che considerato un intervallo δ contiguo a E , il rapporto fra l'ordinata di un punto di C_δ e la lunghezza dell'arco di C_δ che comincia nell'estremo sinistro (p. es.) di δ e termina nel punto detto, è minore dell'ennesima parte del rapporto analogo relativo a C_δ' ed è poi minore dell'ennesima parte del massimo di questo stesso rapporto considerato nella prima metà di δ (cioè perchè le curve C_δ e C_δ' sono simmetriche rispetto all'asse del segmento δ). Il rapporto primitivo è allora minore di $\frac{1}{5 \cdot n}$. Infatti per la (3') si ha che tale rapporto resta inferiore a $\frac{1}{5n}$. De-

duciamo dunque da (5):

$$\frac{p^*}{L_{P^*}^* - L_P^*} < \frac{1}{5n}$$

essendo n l'ordine di δ . Al tendere di P^* a P , n tende all'infinito; e perciò

$$\lim_{P^* \rightarrow P} \frac{p^*}{L_{P^*}^* - L_P^*} = 0.$$

È dunque in P : $\frac{dy}{ds} = 0$ e anche questo risultato vale se P è l'estremo di un intervallo contiguo a E .

5. Modificando leggermente la costruzione qui data, si potrebbe costruire una curva rappresentabile nella forma $y = f(x)$, rettificabile, avente tangente variabile in modo continuo in tutti i punti eccettuati quelli dell'insieme perfetto di misura nulla E , e avente dappertutto le derivate $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ le quali risultino continue ovunque ad eccezione al più dell'insieme E , ed ambedue nulle in tutti i punti di E .

6. Il metodo seguito, opportunamente modificato, si presta anche per costruire una curva continua e rettificabile tale che, fissato un numero k in modo che $0 < k < 1$, in tutti i punti di un insieme perfetto E dappertutto denso esistano le $\frac{dx}{ds}$ e $\frac{dy}{ds}$ soddisfacenti in E alle relazioni $\frac{dx}{ds} = k$, $\frac{dy}{ds} = 0$.