Bollettino
Unione Matematica Italiana

A. Mambriani

Sull'approssimazione dell'integrale di Lebesgue per le funzioni di una variabile

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.3, p. 173–181.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_3_173_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1947.

SEZIONE SCIENTIFICA

PICCOLE NOTE

Sull'approssimazione dell'integrale di Lebesgue per le funzioni di una variabile.

Nota di A. MAMBRIANI (a Bologna) (*).

Sunto - *In vista di applicazioni alla risoluzione del problema di* GEÖCZE *sulla quadratura delle superficie, si dànno due teoremi sull'approssimazione dell'integrale di* LEBESGUE *per le funzioni di una variabile.*

Il mio amato e sommo Maestro L. TONELLI – del quale ora rimpiangiamo vivamente la perdita prematura e sentiamo sempre più il grande e incolmabile vuoto da Lui lasciato – tenne nel 1942 alla Università di Bologna una delle Sue belle e profonde Conferenze ([1]). A seguito di tale Conferenza mi proposi di studiare un notevole problema sulla quadratura delle superficie, recentemente denominato, da T. RADÓ ([2]) e dalla sua Scuola americana, « il problema di GEÖCZE », consistente nello « stabilire se è possibile approssimare l'area secondo LEBESGUE di una superficie continua mediante le aree delle poliedriche *inscritte* nella superficie ».

Il TONELLI, che consultai in seguito, mi consigliò di rivolgermi per tale problema al prof. L. CESARI che si era già occupato tanto profondamente del problema della quadratura delle superficie ([3]).

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

([1]) L. TONELLI, *Su alcuni concetti dell'Analisi moderna,* « Annali R. Scuola Norm. Sup. », s. 2, vol. 11 (1942), pp. 107-118.

([2]) T. RADÓ, *On a problem of* GEÖCZE, « American Journal of Mathematics », vol. 65 (1943), pp. 361-381.

([3]) L. CESARI, *Sulle superficie di area finita secondo* LEBESGUE, « Rend. R. Accad. d'Italia », s. 7, vol. 3 (1941), pp. 350-365; *Sulla quadratura delle superficie in forma parametrica,* « Bollettino Unione Matem. Ital. », s. 2, Nel 1943 il CESARI rilevò che tale problema poteva essere messo in connessione con delicate questioni di approssimazione dell'integrale di LEBESGUE per le funzioni di una e di due variabili indipendenti. Seguendo tale osservazione e facendo seguito a un mio precedente lavoro [4], in questa Nota mi propongo di stabilire due teoremi sull'approssimazione dell'integrale di LEBESGUE per le funzioni di una variabile; in altro lavoro estenderò tali risultati all'integrale di LEBESGUE per le funzioni di due variabili; infine, in un terzo lavoro mi occuperò del problema di GEÖCZE. Ecco i due teoremi che qui dimostro.

TEOREMA I. - *Se* $\{ \mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{a} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b} \}$ *è una funzione quasi-continua e integrabile* L, *ad ogni* $\varepsilon > 0$ *arbitrario si può far corrispondere un gruppo di punti* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_m$, *con*

$$a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_m \leq b, \quad x_1 - a < \varepsilon, \quad b - x_m < \varepsilon,$$
$$x_{i+1} - x_i < \varepsilon \quad per \quad i = 1, 2, \ldots, m-1,$$

in modo che sia

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i') \right| < \varepsilon, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} | f(x) - f(x_i') |\,dx < \varepsilon, \tag{2}$$

avendosi $\mathrm{x}_i' = \mathrm{x}_i$ *oppure* $\mathrm{x}_i' = \mathrm{x}_{i+1}$.

TEOREMA II. - *Se* $\{ \mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{a} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b} \}$ *è una funzione quasi-continua e integrabile* L, *ad ogni* $\varepsilon > 0$ *arbitrario si può far corrispondere un* $\delta > 0$ *tale che sia*

$$\sum_{i=1}^{m-1} \int_{l_i} | f(x) - \mu_i |\,dx < \varepsilon \tag{3}$$

per ogni suddivisione dell'intervallo (a, b) *in intervalli* $\mathrm{l}_1, \mathrm{l}_2, \ldots, \mathrm{l}_m$ *tutti di lunghezze* $< \delta$, *e per*

$$\mu_i = \frac{1}{| l_i |.} \int_{l_i} f(\xi)\,d\xi, \qquad (i = 1, 2 \ldots, m) \text{ [5]}.$$

vol. 4 (1942), pp. 109-117; *Criteri di uguale continuità ed applicazioni alla quadratura delle superficie*, « Annali R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », s. 2, vol. 12 (1943), pp. 61-84; ecc..

(4) A. MAMBRIANI, *Su due notevoli integrali del* TONELLI, « Annali di Matem. pura ed appl. », s. 4, t. 23 (1944), pp. 51-68.

(5) Considerato un insieme misurabile $\mathfrak{J}$, nel seguito si trova comodo di indicare col simbolo $|\mathfrak{J}|.$ la sua misura (il punto sta ad evitare ogni eventuale confusione col segno di valore assoluto).

§ 1. Considerazioni preliminari.

1. LEMMA. – *Se* $\{ f(x), a \leq x \leq b \}$ *è una funzione quasi-continua e integrabile* L, *ad ogni* $\sigma > 0$ *arbitrario si può far corrispondere*

1°) *un intero* $q \geq 1$,
2°) *un plurintervallo* [6] *aperto* Δ, *dell'intervallo* (a, b), *contenente l'insieme* I_q *dei punti di* (a, b) *nei quàli è* $|f(x)| > q$, *e tale che la funzione* $\{ f(x), (a, b) - \Delta \}$ *sia continua,*

in modo che si abbia

$$|\Delta|. < \frac{\sigma}{q} \qquad \text{(e quindi anche } |\Delta|. < \sigma) \text{ [7].} \tag{4}$$

$$\int_\Delta |f(x)|\, dx < \sigma. \tag{5}$$

DIMOSTRAZIONE. – In corrispondenza a un $\sigma > 0$ arbitrario esiste un $\tau > 0$ tale che sia

$$\int_I |f(x)|\, dx < \frac{\sigma}{4} \tag{6}$$

per ogni insieme misurabile I, di (a, b), con $|I|. < \tau$. Detto q un intero positivo qualunque, sia I_q l'insieme dei punti di (a, b) nei quali è $|f(x)| > q$. Manifestamente si ha $\lim_{q \to +\infty} |I_q|. = 0$. Da ora in avanti q sarà fissato così:

$$q = (\text{intero positivo minimo pel quale è } |I_q|. < \tau). \tag{7}$$

Per (6) sarà allora

$$\int_{I_q} |f(x)|\, dx < \frac{\sigma}{4} \tag{8}$$

e va tenuto presente che è

$$|f(x)| \leq q \quad \text{in} \quad (a, b) - I_q, \quad |f(x)| > q \quad \text{in} \quad I_q. \tag{9}$$

[6] Col TONELLI si chiama un *plurintervallo* dell'intervallo (a, b) un un insieme di intervalli di (a, b) non sovrapponentisi e in numero finito o in un'infinità numerabile. Vedasi: L. TONELLI, *Sulla nozione di integrale*, « Annali di Matem. pura e applicata », s. 4, t. 1 (1923-24), pp. 105-145: cfr., in particolare, la pag. 109.

[7] Il simbolo $|\Delta|.$ indica la lunghezza di Δ, conformemente a quanto è fissato nell'annotazione [5].

Abbiamo quindi

$$q\,|\,I_q\,|. < \int_{I_q} |\,f(x)\,|\,dx < \frac{\sigma}{4}, \qquad \text{onde} \qquad |\,I_q\,|. < \frac{\sigma}{4q};$$

è dunque

$$|\,I_q\,|. < \min\left(\tau,\ \frac{\sigma}{4q}\right). \tag{10}$$

Sia Δ_0 un plurintervallo aperto, dell'intervallo (a, b), con

$$|\,\Delta_0\,|. < \min\left(2\tau,\ \frac{\sigma}{2q}\right), \tag{11}$$

tale che la funzione $\{ f(x),\ (a, b) - \Delta_0 \}$ sia continua.

Sia infine Δ un plurintervallo aperto, dell'intervallo (a, b), ricoprente I_q e Δ_0, con

$$|\,\Delta\,|. \leq 2\,|\,I_q\,|. + |\,\Delta_0\,|.;$$

onde, per (10) e (11),

$$|\,\Delta\,|. < \min\left(4\tau,\ \frac{\sigma}{q}\right). \tag{12}$$

Abbiamo dunque che tale Δ è un plurintervallo aperto del tipo detto nell'enunciato del Lemma; si ha $|\,\Delta\,|. < \dfrac{\sigma}{q}$, cioè vale la (4); si ha $|\,\Delta\,|. < 4\tau$, cioè — in virtù di (6) — vale anche la (5). Il Lemma è così pienamente dimostrato.

Osservazione. – La funzione $\{ f(x),\ (a, b) - \Delta \}$ è *limitata* e si ha precisamente, per (9),

$$|\,f(x)\,| \leq q \quad \text{per ogni } x \text{ di } \quad (a, b) - \Delta; \tag{13}$$

tale funzione è anche *continua*, e quindi in corrispondenza al σ prefissato esiste un $\delta > 0$, *e supporremo* $\delta < \sigma$, tale che sia

$$|\,f(x') - f(x'')\,| < \sigma \quad \text{per ogni } x' \text{ e } x'', \text{ di } (a, b) - \Delta, \quad \text{con } |\,x' - x''\,| < \delta. \tag{14}$$

§ 2. Dimostrazione del Teorema I.

2. Fissato un $\sigma > 0$ arbitrario, restino dunque determinati corrispondentemente, in forza del Lemma e della Osservazione del n. 1,

l'intero q ≥ 1, *il plurintervallo aperto* Δ, *il numero* $\delta > 0$.

Sia ora $x_1, x_2, \ldots, x_m$ un qualunque gruppo di punti, dell'intervallo (a, b), così scelto:

$$\begin{cases} 1^\circ)\ a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_m \leq b, \\ 2^\circ)\ \textit{se un intervallo } (x_i, x_{i+1}) \textit{ ha punti interni fuori di } \Delta \textit{ sia} \\ \qquad x_{i+1} - x_i < \delta, \\ 3^\circ)\ \textit{se un intervallo } (x_i, x_{i+1}) \textit{ ha i punti interni tutti in } \Delta \\ \qquad \textit{uno almeno dei suoi estremi sia fuori di } \Delta. \text{ (}^8\text{)} \end{cases}$$

Gli intervalli soddisfacenti a 2°), aventi tutti lunghezze $< \delta$, si diranno di 1ª categoria e si indicheranno con $(x_i, x_{i+1})'$; gli intervalli rimanenti soddisfacenti a 3°), aventi lunghezze eventualmente $> \delta$, si diranno di 2ª categoria e si indicheranno con $(x_i, x_{i+1})''$. Segue

$$\Sigma \,|\, (x_i, x_{i+1})'' \,|. \leq |\, \Delta \,|..$$

Sia poi

(15) $\qquad x_i' = (\textit{punto qualunque dell'insieme chiuso } (x_i, x_{i+1}) - \Delta),$
$$\text{per } i = 1, 2, \ldots, m-1,$$

onde se l'intervallo (x_i, x_{i+1}) è di 2ª categoria sarà necessariamente $x_i' = x_i$ oppure $x_i' = x_{i+1}$.

3. Relativamente agli intervalli $(x_i, x_{i+1})'$ abbiamo:

$$\int\limits_{(x_i, x_{i+1})'} | f(x) - f(x_i') | \, dx \leq \int\limits_{(x_i, x_{i+1})' - \Delta} | f(x) - f(x_i') | \, dx + \int\limits_{(x_i, x_{i+1})'\Delta} | f(x) | \, dx + \int\limits_{(x_i, x_{i+1})'\Delta} | f(x_i') | \, dx,$$

da cui, per (14) e (13),

$$\int\limits_{(x_i, x_{i+1})'} | f(x) - f(x_i') | \, dx < (x_{i+1} - x_i) \, | \, \sigma + \int\limits_{(x_i, x_{i+1})'\Delta} | f(x) | \, dx + q \, | \, (x_i, x_{i+1})'\Delta \, |.,$$

onde

(16) $$\Sigma \int\limits_{(x_i, x_{i+1})'} | f(x) - f(x_i') | \, dx < (b - a)\sigma + \int\limits_{\Delta} | f(x) | \, dx + q \, | \, \Delta \, |..$$

4. Relativamente agli intervalli $(x_i, x_{i+1})''$ abbiamo:

$$\int\limits_{(x_i, x_{i+1})''} | f(x) - f(x_i') | \, dx \leq \int\limits_{(x_i, x_{i+1})''} | f(x) | \, dx + \int\limits_{(x_i, x_{i+1})''} | f(x_i') | \, dx \leq \int\limits_{(x_i, x_{i+1})''} | f(x) | \, dx + q \, | (x_i, x_{i+1})'' \, |.,$$

onde

(17) $$\Sigma \int\limits_{(x_i, x_{i+1})''} | f(x) - f(x_i') | \, dx \leq \int\limits_{\Delta} | f(x) | \, dx + q \, | \, \Delta \, |..$$

(8) Facile è decidere che esistono *infiniti* gruppi di punti soddisfacenti a tali condizioni. Ad esempio i punti x_i si potrebbero prendere tutti in $(a, b) - \Delta$, soddisfacendo poi alle condizioni 1°) e 2°) sopra dette.

5. Da (16) e (17) segue quindi

$$\sum_{i=1}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f(x)-f(x_i')|\,dx<(b-a)\sigma+2\int_{\Delta}|f(x)|\,dx+2q\,|\Delta|_{\cdot}\,,$$

da cui, per (4) e (5),

$$\sum_{i=1}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f(x)-f(x_i')|\,dx<(b-a)\sigma+2\sigma+2\sigma=(b-a+4)\sigma\,. \tag{18}$$

Pertanto, prendendo $\sigma=\varepsilon:(b-a+4)$ la (2) è dimostrata.

Osservazione. – Poichè x_i' va scelto com'è espresso da (15), per potere porre indifferentemente — come afferma il Teorema I — $x_i'=x_i$ od $x_i'=x_{i+1}$, *fisseremo ora di assumere i punti* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *nell'insieme chiuso* $(a, b)-\Delta$ (cfr. l'annotazione ([8])). Avendosi poi $|\Delta|_{\cdot}<\sigma<\varepsilon$, sempre potremo prendere x_1 e x_m in modo che sia $x_1-a<\sigma$, $b-x_m<\sigma$, onde anche $x_1-a<\varepsilon$, $b-x_m<\varepsilon$; nello stesso tempo avremo pure $x_{i+1}-x_i<\varepsilon$ per $i=1, 2, \ldots, m-1$ (invero, ciò si verifica per gli intervalli di 1ª categoria, perchè per essi si ha $x_{i+1}-x_i<\delta$, si è scelto $\delta<\sigma$ ed è $\sigma<\varepsilon$; ciò si verifica per gli intervalli di 2ª categoria, perchè per essi si ha, manifestamente, $x_{i+1}-x_i<|\Delta|_{\cdot}$ ed è $|\Delta|_{\cdot}<\sigma<\varepsilon$).

6. Da (18) segue, a più forte ragione,

$$\left|\sum_{i=1}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f(x)-f(x_i')|\,dx\right|<(b-a+4)\sigma,$$

ossia

$$\left|\int_{x_1}^{x_m}f(x)\,dx-\sum_{i=1}^{m-1}(x_{i+1}-x_i)\,f(x_i')\right|<(b-a+4)\sigma;$$

inoltre è, tenendo presente l'Osservazione del n. precedente e la (5),

$$\left|\int_a^{x_1}f(x)\,dx\right|\leq\int_a^{x_1}|f(x)|\,dx\leq\int_{\Delta}|f(x)|\,dx<\sigma,$$

$$\left|\int_{x_m}^{b}f(x)\,dx\right|\leq\int_{x_m}^{b}|f(x)|\,dx\leq\int_{\Delta}|f(x)|\,dx<\sigma.$$

Si conclude quindi subito con la (1) prendendo $\sigma=\varepsilon:(b-a+6)$.

Il Teorema I è così completamente dimostrato.

7. Utile è notare — ciò che servirà anche per le estensioni di tali considerazioni alle funzioni di due variabili indipendenti — che dalla dimostrazione precedente discende il seguente

TEOREMA. - *Se* $\{f(x), a \leq x \leq b\}$ *è una funzione quasi-continua e integrabile* L, *ad ogni* $\varepsilon > 0$ *arbitrario si può far corrispondere*

$$\begin{cases} \text{un plurintervallo aperto } \Delta, \text{ di } (a, b), \text{ con } 0 < |\Delta| < \varepsilon, \\ \text{e un numero } \delta, \text{ con } 0 < \delta < \varepsilon, \end{cases}$$

in modo che si abbia

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x_i')| \, dx < \varepsilon,$$

per ogni gruppo di punti $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *così scelti:*

$$\begin{cases} a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_m \leq b, \\ \text{se un intervallo } (x_i, x_{i+1}) \text{ ha punti interni fuori di } \Delta \text{ sia} \\ \qquad x_{i+1} - x_i < \delta, \\ \text{se un intervallo } (x_i, x_{i+1}) \text{ ha i punti interni tutti in } \Delta \text{ uno} \\ \qquad \text{almeno dei suoi estremi sia fuori di } \Delta; \end{cases}$$

inoltre, per x_i' (*con* $i = 1, 2, \ldots, m-1$) *punto qualunque dell'insieme* $(x_i, x_{i+1}) - \Delta$.

OSSERVAZIONE. - Dalla dimostrazione fatta discende pure che nella scelta dei punti $x_1, x_2, \ldots, x_m$ si possono sempre trascurare i punti di un insieme di misura nulla, nonchè i punti di un plurintervallo Δ qualsiasi di lunghezza sufficientemente piccola. Ne consegue che se nello stesso intervallo (a, b) sono definite più funzioni $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\nu(x)$, in numero finito ν, tutte quasi-continue e integrabili L, si può sempre determinare un unico gruppo di punti $x_1, x_2, \ldots, x_m$ per il quale valga la tesi del Teorema I contemporaneamente per tutte le ν funzioni; analogamente, si può determinare un unico plurintervallo Δ e un solo $\delta > 0$ per i quali valga la tesi del precedente Teorema contemporaneamente per tutte le ν funzioni.

§ 3. - Dimostrazione del Teorema II.

8. Fissato un $\sigma > 0$ arbitrario, restino anche ora determinati corrispondentemente, in forza del Lemma e dell'Osservazione del n°. 1,

l'intero $q \geq 1$, *il plurintervallo aperto* Δ, *il numero* $\delta > 0$.

Consideriamo una qualunque suddivisione dell'intervallo (a, b) in intervalli $l_1, l_2, \ldots, l_m$ tutti di lunghezze $< \delta$. Classifichiamo tali intervalli in due categorie:

gli l_i, che diremo di 1ª categoria e indicheremo con l_i', aventi qualche punto interno fuori di Δ;

gli l_i rimanenti, che diremo di 2ª categoria e indicheremo con l_i'', appartenenti tutti a Δ, a meno eventualmente degli estremi.

9. Relativamente a un intervallo l_i' abbiamo, detto x_i' un punto qualunque dell'insieme non vuoto $l_i' - \Delta$,

$$f(x) - \mu_i = \{ f(x) - f(x_i') \} - \{ \mu_i - f(x_i') \},$$

dov'è

$$\mu_i - f(x_i') = \frac{1}{|\, l_i' \,|.} \int_{l_i'} \{ f(\xi) - f(x_i') \} \, d\xi .$$

Ne risulta

$$\int_{l_i'} | f(x) - \mu_i | \, dx \leq \int_{l_i'} | f(x) - f(x_i') | \, dx + \int_{l_i'} \frac{dx}{|\, l_i' \,|.} \int_{l_i'} | f(\xi) - f(x_i') | \, d\xi =$$

$$= 2 \int_{l_i'} | f(x) - f(x_i') | \, dx .$$

Sull'ultimo membro si può procedere analogatamente al n.° 3, e s'ottiene

$$\int_{l_i'} | f(x) - \mu_i | \, dx \leq 2 \int_{l_i' - \Delta} | f(x) - f(x_i') | \, dx + 2 \int_{l_i'\Delta} | f(x) | \, dx + 2 \int_{l_i'\Delta} | f(x_i') | \, dx ,$$

da cui, per (13) e (14),

$$\int_{l_i'} | f(x) - \mu_i | \, dx < 2\sigma \, |\, l_i' \,|. + 2 \int_{l_i'\Delta} | f(x) | \, dx + 2q \, |\, l_i'\Delta \,|. .$$

È dunque

$$\sum_i \int_{l_i} | f(x) - \mu_i | \, dx < 2(b - a)\sigma + 2 \int_{\Delta} | f(x) | \, dx + 2q \, |\, \Delta \,|. . \tag{19}$$

10. Relativamente a un intervallo l_i'' abbiamo:

$$\int_{l_i''} | f(x) - \mu_i | \, dx \leq \int_{l_i''} | f(x) | \, dx + | \mu_i | \, |\, l_i'' \,|. = \int_{l_i''} | f(x) | \, dx + \left| \int_{l_i''} f(\xi) d\xi \right| ,$$

onde

$$\sum_i \int_{l_i''} | f(x) - \mu_i | \, dx \leq \sum_i 2 \int_{l_i''} | f(x) | \, dx \leq 2 \int_{\Delta} | f(x) | \, dx . \tag{20}$$

11. Da (19) e (20) segue quindi

$$\sum_{i=1}^{m-1} \int_{l_i} | f(x) - \mu_i | \, dx < 2\,(b - a)\sigma + 4 \int_{\Delta} | f(x) | \, dx + 2q \, | \Delta | .,$$

da cui, per (4) e (5),

$$\sum_{i=1}^{m-1} \int_{l_i} | f(x) - \mu_i | \, dx < 2\,(b - a)\sigma + 4\sigma + 2\sigma = 2(b - a + 3)\sigma .$$

E prendendo $\sigma = \varepsilon : [2(b - a + 3)]$ s'ottiene proprio la (3). Anche il Teorema II è così completamente dimostrato.