Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Berzolari

Su un semplice problema di geometria numerativa

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.2, p. 93–95.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_2_93_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1947.

SEZIONE SCIENTIFICA

PICCOLE NOTE

Su un semplice problema di geometria numerativa.

Nota di LUIGI BERZOLARI (a Pavia).

Sunto. - *Si risolve direttamente un caso particolare del problema degli spazi secanti.*

In alcune ricerche numerative su curve algebriche — che non so se mi sarà dato di poter condurre a termine — mi è occorso di considerare la questione seguente:

In uno spazio lineare $[n]$ di n dimensioni assegnare il numero degli spazi $[s]$ soddisfacenti le seguenti condizioni simultanee e tra loro indipendenti:

1) di incontrare un dato $[k]$ in un punto;
2) di tagliare un dato piano lungo una retta;
3) di appoggiarsi ad N date rette indipendenti,

i numeri n, s, k, N essendo tali da rendere determinato il problema.

È un caso particolare del « problema degli spazi secanti », risolto in generale dal GIAMBELLI, ma è possibile darne per via semplice una soluzione diretta.

Con i noti simboli dello SCHUBERT, la prima condizione è rappresentata da

$$(k,\ n-s+1,\ n-s+2,\ n-s+3, \ldots,\ n-1,\ n),$$

e la seconda da

$$(1,\ 2,\ n-s+2,\ n-s+3, \ldots,\ n-1,\ n)$$

e il loro *prodotto* si può eseguire mediante una formola di riduzione dovuta al PIERI [1], per la quale si trova che il soddisfare

[1] *Sul problema degli spazi secanti*, « Rend. dell'Istituto Lombardo ». (2) 26 (1893), pp. 534-546; (2) 27 (1894), pp. 258-273; (2) 28 (1895), pp. 441-454.

all'una e all'altra val quanto soddisfare **l'una o l'altra** delle seguenti due condizioni *fondamentali*:

$$\alpha) \qquad (0,\ 2,\ k+3,\ n-s+3,\ n-s+4, \ldots,\ n-1,\ n),$$

$$\beta) \qquad (1,\ 2,\ k+2,\ n-s+3,\ n-s+4, \ldots,\ n-1,\ n).$$

che indicherò rispettivamente con x e y.

Restano soltanto da trovare i numeri X e Y degli $[s]$ soddisfacenti la terza condizione e rispettivamente le condizioni x e y: dopo di che sarà $X+Y$ il numero cercato.

A ciò serve una nota formola del CASTELNUOVO (²), usata una volta nell'ipotesi x e un'altra volta nell'ipotesi y, ritenendo che per il calcolo di X i numeri $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}, a_s$ abbiano i valori scritti in α) e per il calcolo di Y i valori scritti in β).

In entrambi i casi si trova

$$N = \frac{k+5+\frac{1}{2}(2n-s+3)(s-2)-\frac{1}{2}s(s+1)}{n-s-1},$$

$$d = N - s - 1 = \frac{4s+k+3-3n}{n-s-1}. \text{ Ecc.}$$

Si ha poi in particolare:

$$\begin{aligned}
\text{A)}\ (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{s-2}, n-2, n)&(1, 2, n-s+2, n-s+3, \ldots, n-1, n) \\
&= (0,\ 2,\ a_0+2,\ a_1+2, \ldots,\ a_{s-2}+2) \\
&+ (0,\ 1,\ a_0+3,\ a_1+2,\ a_2+2, \ldots,\ a_{s-2}+2) \\
&+ (0,\ 1,\ a_0+2,\ a_1+3,\ a_2+2, \ldots,\ a_{s-2}+2) \\
&+ (0,\ 1,\ a_0+2,\ a_1+2,\ a_2+3, \ldots,\ a_{s-2}+2) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (0,\ 1,\ a_0+2,\ a_1+2,\ a_2+2, \ldots,\ a_{s-3}+2,\ a_{s-2}+3);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{B)}\ (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{s-2}, n-1, n)&(1, 2, n-s+2, n-s+3, \ldots, n-1, n) \\
&= (1,\ 2,\ a_0+2,\ a_1+2,\ a_2+2, \ldots,\ a_{s-2}+2) \\
&+ (0,\ 2,\ a_0+3,\ a_1+2,\ a_2+2, \ldots,\ a_{s-2}+2) \\
&+ (0,\ 2,\ a_0+2,\ a_1+3,\ a_2+2, \ldots,\ a_{s-2}+2) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (0,\ 2,\ a_0+2,\ a_1+2,\ a_2+2, \ldots,\ a_{s-3}+2,\ a_{s-2}+3) \\
&+ (0,\ 1,\ a_0+3,\ a_1+3,\ a_2+2, \ldots,\ a_{s-2}+2) \\
&+ (0,\ 1,\ a_0+3,\ a_1+2,\ a_2+3,\ a_3+2, \ldots,\ a_{s-2}+2) \\
&+ (0,\ 1,\ a_0+2,\ a_1+3,\ a_2+3,\ a_3+2, \ldots,\ a_{s-2}+2) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (0,\ 1,\ a_0+2,\ a_1+2,\ a_2+2, \ldots,\ a_{s-4}+2,\ a_{s-3}+3,\ a_{s-2}+3).
\end{aligned}$$

(²) *Numero degli spazi che segano più rette in uno spazio ad* n *dimensioni*, « Rend. dell'Acc. dei Lincei ». (4) 5 (1889), pp. 71-78; *Memorie scelte*. Bologna 1937, pp. 55-64.

Ancora:

C) $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{s-2}, n-1, n)(0, 1, n-s+2, n-s+3, \dots, n-1, n)$
$= (0, 1, a_0+2, a_1+2, a_2+2, \dots, a_{s-2}+2)$;

D) $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{s-2}, n-1, n)(0, 2, n-s+2, n-s+3, \dots, n-1, n)$

$$
\begin{aligned}
&= (0, 2, a_0+2, a_1+2, a_2+2, \dots, a_{s-2}+2) \\
&+ (0, 1, a_0+3, a_1+2, a_2+2, \dots, a_{s-2}+2) \\
&+ (0, 1, a_0+2, a_1+3, a_2+2, \dots, a_{s-2}+2) \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ (0, 1, a_0+2, a_1+2, a_2+2, \dots, a_{s-3}+2, a_{s-2}+3).
\end{aligned}
$$

Dubito che non si possano assegnare formole egualmente generali quando il secondo elemento del secondo fattore sia maggiore di 2.