UMI

## Recensioni

* G.Vitali, G. Sansone, Moderna teoria delle funzioni di variabile reale, Parte II, II edizione, Zanichelli, Bologna, 1946 (Silvio Cinquini)
* V. E. Cosslett, Introduction to electron optics. The production and focusing of electron beams, Clarendon Press, Oxford, 1946
* A. C. Aitken, Determinants and matrices, Oliver and Boid, Edinburg, 1946
* T. H. Turney, Heaviside's operational calculus made easy, II edizione, Chapmann & Hall, London, 1946
* D. R. Hartree, Calculating machines - Recent and prospective developments, Cambridge University Press, Cambridge
* W. L. Summer, Progress in Science, Blackwell, Oxford, 1946
* J. J. Burckhardt, Die Bewegungsgruppen der Kristallographie, Birkhäuser, Basel, 1947 (Beniamino Segre)

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **2** (1947), n.2, p. 150–157.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_2_150_0>

# RECENSIONI

G. VITALI - G. SANSONE: *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale.* Parte II (G. SANSONE: *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*). 2ª edizione (N. Zanichelli, Bologna, 1946, pp. VIII + 511).

La prima edizione del volume sugli sviluppi ortogonali che il SANSONE ha pubblicato nel 1935 fra le Monografie del Consiglio nazionale delle ricerche ha avuto il più ambito e ben noto successo e si è esaurita tanto rapidamente che una nuova edizione è apparsa nello scorso anno. Avendo già rilevato, quando abbiamo riferito sulla precedente edizione (1), i pregi e l'interesse che l'ampio contenuto dell'opera offre non solo ai cultori delle matematiche applicate, ai quali è dedicato, ma anche agli analisti, ci limitiamo nelle seguenti righe a occuparci della novità della presente edizione, la quale viene a conoscenza degli studiosi nel momento in cui, dopo la stasi del periodo bellico, l'attività scientifica riprende con rinnovata intensità e si riallacciano i rapporti internazionali.

Un semplice sguardo esterno all'opera in esame rivela la mole molto maggiore in confronto a quella della prima edizione: infatti il nuovo volume contiene ben 200 pagine in più di quello apparso nel 1935, e l'attenzione del lettore è attratta sopra tutto da due novità che emergono.

Notevolmente arricchito è il Cap. III dedicato originariamente soltanto ai polinomi di LEGENDRE: nella presente edizione sono aggiunti i nuovi paragrafi 7 (contenente le formule di MEHLER), 8 (in cui, usufruendo della forma di SZEGÖ del teorema di confronto di STURM per le equazioni differenziali lineari del secondo ordine, vengono stabilite le limitazioni di BRUNS per la separazione degli zeri dei polinomi di LEGENDRE) e 15 (dedicato allo sviluppo in serie di STIELTJES-NEUMANN). Completamente nuovi sono gli ultimi nove paragrafi, il primo dei quali (§ 17) tratta delle funzioni di FERRERS associate ai polinomi di LEGENDRE. Con il § 17 si inizia la parte dedicata alle funzioni sferiche di ordine $n$ in due variabili (note sotto il nome di funzioni di LAPLACE) che vengono introdotte partendo dalla considerazione dei polinomi di LAPLACE di grado $n$ in tre variabili, e le cui proprietà vengono studiate nel citato paragrafo e nei due successivi in relazione anche ai polinomi di LEGENDRE, per i quali viene dedotta la formula di addizione. Si passa quindi (§§ 21 e 22) alla considerazione delle serie di LAPLACE e allo studio della loro convergenza; la sommazione $(C, k)$ forma oggetto del § 23, alla fine del quale figura l'enunciato del notevole criterio

(1) Questo «Bollettino», A. XV (1936), pp. 93-96.

stabilito dal SANSONE nel 1937, mentre il § 24 è dedicato alla sommazione di POISSON con applicazione alla risoluzione del problema interno di DIRICHLET per la sfera. Il capitolo si chiude con il § 25 nel quale, partendo dall'osservazione che una serie di LEGENDRE può considerarsi come caso particolare di una serie di LAPLACE, l'A. perviene ad alcuni risultati sulla sommazione di POISSON e sulla convergenza delle serie di LEGENDRE.

Ma la maggior novità dell'opera è costituita da un capitolo (il V) del tutto nuovo, dedicato all'approssimazione e all'interpolazione. Nel § 1 viene posto e risolto mediante il teorema di WEIERSTRASS il problema dell'approssimazione delle funzioni continue mediante polinomi razionali interi: per le funzioni di una sola variabile la dimostrazione viene ricondotta al caso delle funzioni periodiche per usufruire di una delle proprietà dei polinomi trigonometrici di FÉJER stabilite nel Cap. II; invece, per le funzioni di due variabili (siccome l'opera in esame non tratta delle serie doppie di FOURIER) la dimostrazione si giova degli sviluppi in serie di LAPLACE, ai quali, come abbiamo già rilevato, l'A. ha dedicato alcuni nuovi paragrafi del Cap. III. Altre risoluzioni del problema in questione sono ottenute nei successivi paragrafi (come in essi l'A. rileva) mediante i polinomi di STIELTJES, di JACKSON, di miglior approssimazione di TCHEBYCHEF, ecc.. Oggetto del § 2 sono gli importanti polinomi approssimativi di STIELTJES in una e in due variabili, la cui efficacissima applicazione in tanti capitoli dell'analisi è ben diffusa, e per i quali l'A. riporta alcuni dei classici risultati del TONELLI. Nel § 3 viene ripreso il problema dell'approssimazione trigonometrica introducendo i polinomi di JACKSON, i quali forniscono una rappresentazione che converge più rapidamente di quella ottenuta mediante i polinomi di FÉJER. Segue il § 4 con i teoremi di BERNSTEIN e di MARKOFF sulla limitazione delle derivate dei polinomi trigonometrici e di quelli razionali interi. Interessantissimo è il § 5, dedicato alle questioni relative ai polinomi di miglior approssimazione di TCHEBYCHEF, alle quali hanno arrecato importanti contributi il TONELLI e anche il SIBIRANI: l'A. sviluppa la trattazione per i polinomi trigonometrici rilevando anche qui che a tale caso può essere ricondotto il problema dell'approssimazione con polinomi razionali interi.

Le considerazioni sull'approssimazione terminano con il § 6 che tratta dei polinomi di TCHEBYCHEF di prima e di seconda specie. Al problema dell'interpolazione mediante polinomi razionali interi è dedicato il § 7, nel quale vengono date le formule di LAGRANGE e di HERMITE, la cui convergenza viene studiata nel paragrafo successivo. I polinomi di interpolazione generalizzata di BERNSTEIN formano oggetto del § 9, e il Capitolo si chiude con il § 10 che tratta dell'interpolazione trigonometrica.

Quanto abbiamo finora esposto mette in luce le maggiori novità che presenta la nuova edizione, ma anche gli altri capitoli della prima edizione (a prescindere dal quarto dedicato agli sviluppi in serie di polinomi di TCHEBYCHEF-LAGUERRE e di TCHEBYCHEF-HERMITE è rimasto immutato) sono stati rielaborati ed accresciuti.

Alla fine del Cap. I figurano due nuovi paragrafi: l'8 dedicato all'integrabilità $L^p$ (in esso stabilite le classiche disuguaglianze di HÖLDER-RIESZ e di MINKOWSKI), e sul quale è basato il successivo che tratta della convergenza di ordine $p$ e si presenta quindi come estensione del § 5, nel quale è già stata considerata l'usuale convergenza in media che si ha per $p = 2$.

Nel Cap. II che ha come oggetto le serie di FOURIER è inserito il nuovo

§ 5 sull'integrazione termine a termine delle serie di FOURIER, utilizzata per stabilire un criterio di convergenza puntuale di HARDY-LITTLEWOOD, mentre un'altra novità è costituita dal § 7, dedicato alla sommabilità $(C, k)$ (con $k > 0$) delle serie di FOURIER, e che si presenta come un'estensione del precedente paragrafo che figurava anche nella prima edizione e nel quale è considerato il caso $k = 1$. Alla fine del penultimo paragrafo (l'8 della nuova edizione) che tratta della sommazione di POISSON è aggiunto un cenno sul problema interno di DIRICHLET per il cerchio.

Fra le novità dell'ultimo capitolo (il VI della presente edizione), dedicato all'integrale di STIELTJES, rileviamo il teorema di inversione dell'ordine delle integrazioni negli integrali doppi in questione (§ 5, n. 5) e alcune considerazioni nel campo complesso (§ 7, n. 1 e § 9, n. 3) che vengono utilizzate nella dimostrazione di un teorema dovuto a POLYA (§ 9, n. 6) (che non figurava nella prima edizione) sulla convergenza delle successioni di funzioni di ripartizione $\{V_n(\alpha)\}$ nell'ipotesi essenziale che la successione degli integrali $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x} \, dV_n(\alpha)$ converga per tutti i valori reali di un intervallo finito $(-a, a)$. Altra novità (§ 8, n. 4) è costituita dalla estensione, ottenuta dal CANTELLI dopo la pubblicazione della prima edizione, di un teorema di convergenza uniforme in $(-\infty, +\infty)$ di una successione di funzioni di ripartizione dato originariamente dal POLYA nel caso in cui la funzione limite fosse continua, ipotesi abbandonata dal CANTELLI.

Un'amplissima bibliografia (circa doppia di quella che figurava nella prima edizione) chiude l'opera in esame che risente della vasta cultura dell'A. e del fervore che Egli con tanta amorevole cura dedica alla redazione dei propri volumi per renderne gradita la lettura e per contribuire efficacemente alla diffusione del pensiero matematico italiano.

SILVIO CINQUINI

V. E COSSLETT: *Introduction to electron optics. The production and focusing of electron beams*. Oxford, at the Clarendon Press, 1946, XII + 272.

L'ottica elettronica — cioè la produzione, la propagazione e la convergenza dei fasci di elettroni — è uno dei rami più interessanti e più delicati della fisica moderna. Essa occorre ormai sia nella ricerca scientifica che in una quantità di applicazioni industriali; è quindi di grande interesse per lo studioso di fisica aver riuniti in un volume come questo sia i principi fisici, e i loro fondamenti matematici, sia i procedimenti di laboratorio che la governano.

Il libro si inizia con un capitolo introduttivo sui primi mezzi sperimentali (deflessione in un campo magnetico ed elettrico) per la determinazione del rapporto fra carica e massa dell'elettrone, sulla rifrazione elettronica e sulle limitazioni a cui sono soggette le analogie con l'ottica ordinaria. Nel secondo capitolo s'inizia lo studio delle «lenti» per elettroni, cioè dell'effetto di un campo elettrostatico sulle loro traiettorie. La determinazione del potenziale o del campo, in relazione alla forma degli elettrodi, è possibile per via matematica, con integrazione dell'equazione di LAPLACE o di POISSON, solo in pochi casi particolarmente semplici: ma per il tracciamento delle superficie equipotenziali e delle traiettorie degli elettroni occorrono metodi grafici approssimati o sperimentali ricavati da fenomeni d'altra natura e retti dalle stesse equazioni. Il capitolo terzo esamina varî tipi di « lenti » e la convergenza verso un fuoco di fasci di elettroni che si possono ottenere servendosi di campi elettrostatici. Vale per queste « lenti » un sistema di formule e di costruzioni dei punti cardinali analogo a quello per le lenti ottiche. Nel capitolo quarto sono discussi i problemi analoghi onde ottenere la convergenza con l'uso di un campo magnetico, eventualmente sovrapposto ad uno elettrostatico.

La teoria delle lenti elettroniche è così avanzata che anche in essa si possono discutere varî tipi di aberrazione delle immagini: quelle dovute a campi elettrostatici sono esattamente parallele a quelle dell'ottica ordinaria, mentre i campi magnetici danno luogo ad altri tre tipi di aberrazioni (cap. quinto).

Dopo aver discusso i varî tipi di lenti l'A. passa alle applicazioni: un capitolo (sesto) è dedicato alla produzione dei fasci di elettroni per emissione termoionica e fotoelettrica; un'altro (settimo) ai tubi a raggi catodici e loro derivati e in particolare a quelli occorrenti nella televisione; l'ottavo capitolo, esposta la teoria e la pratica della diffrazione degli elettroni, si occupa dei varî tipi di microscopi elettronici; il nono, del magnetrone, del ciclotrone, del betatrone delle valvole radio e degli spettrografi di massa; infine il decimo dei mezzi per modulare la velocità di un fascio di elettroni. La trattazione delle traiettorie data nel volume è basata sulla interpretazione corpuscolare degli ioni ed elettroni: l'interpretazione secondo la meccanica ondulatoria è qui omessa, come troppo elevata per il lettore cui il libro è destinato. Si può però costruire un'ottica degli elettroni partendo da un principio di minimo, sostanzialmente quello di FERMAT, e ricavandone le equazioni di HAMILTON-JACOBI: e questo è fatto nell'Appendice.

Per la chiarezza dell'esposizione, per il felice equilibrio fra la parte teorica e la parte sperimentale, è da ritenere che il volume del COSSLETT sarà un aiuto prezioso sia per lo studioso che per il ricercatore.

## A. C. AITKEN: *Determinants and matrices*. 4ª ediz. (ed Oliver and Boid, Edinburg, 1946), pp. VII + 143.

Questo libretto espone brevemente il calcolo con le matrici e la teoria dei determinanti.

Il primo capitolo dà le definizioni e le operazioni fondamentali sulle matrici; il secondo le definizioni e le proprietà dei determinanti; il terzo la nozione di rango e la risoluzione di sistemi omogenei di equazioni; il quarto gli sviluppi secondo CAUCHY e LAPLACE di un determinante; il quinto si occupa delle matrici composte e l'ultimo presenta tipi notevoli di determinanti (Jacobiani Hessiani, Wronskiani, etc.). Come risulta il contenuto è piuttosto elementare: tuttavia la chiarezza dell'esposizione e la ricchezza degli esempi e degli esercizi ne fanno un'utile introduzione a trattati più elevati.

## T. H. TURNEY: *Heaviside's operational Calculus made easy*. 2ª ediz. (ed. Chapman, & Hall, London, 1946), pp. VIII + 102.

La diffusione del calcolo operazionale fra gli ingegneri giustifica questo volumetto: nel quale l'A. senza preoccupazioni di precisazioni teoriche, prende sotto braccio il suo lettore e gli spiega conversando familiarmente come usare il calcolo di HEAVISIDE e nei casi che si presentano più frequentemente nell'elettrotecnica. A sottolineare il tono confidenziale basterà accennare che in un'appendice di due pagine e mezzo l'A. dà i principî del calcolo differenziale: l'A. è del parere che la matematica per gli ingegneri è come miele nel tè: già poco lo addolcisce molto. Si può convenire con lui se il libretto è destinato ad invogliare all'uso del calcolo operazionale e alla lettura di trattati più estesi, come quello sul calcolo simbolico di A. GHIZZETTI (già recensito in questo Bollettino).

D. R. HARTREE: *Calculating machines - Recent and prospective developments* (Cambridge, University Press, pp. 40).

Questo volumetto è frutto di un viaggio negli Stati Uniti del Prof. D. R. HARTREE, successore del FOWLER nella cattedra di Fisica matematica a Cambridge.

Le macchine calcolatrici, in un'ampiezza di significato che trascende di molto l'idea che comunemente si ha di esse, non solo hanno raggiunto tale potenza da rendere possibile la risoluzione di probemi a cui si sarebbe pensato prima con sgomento, ma, come si vedrà, sono anche tali da influenzare l'orientamento del pensiero matematico.

Il volumetto riferisce particolarmente sull'ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Calculator), la grande macchina calcolatrice dell'Università di Pennsylvania. La caratteristica fondamentale di questa macchina elettronica è la velocità sorprendente con cui compie le operazioni aritmetiche fondamentali: una di queste richiede una frazione di millisecondo, sicchè in un'ora si può compiere un milione di moltiplicazioni. S'immagini il lavoro di calcolazione che può sbrigare una tale macchina entro 24 ore.

Questa rapidità di operazione condiziona le altre caratteristiche della macchina perchè essa andrebbe del tutto sciupata se dovessero moltiplicarsi gli interventi dell'operatore. E perciò bisogna che essa abbia una « memoria » che tenga nota sia delle istruzioni operative fornitele in principio sia dei risultati di operazioni precedenti, occorrenti per le successive, la cui registrazione meccanica richiederebbe un tempo estremamente più lungo e che perciò va evitata.

La « memoria » è forse oggi il lato meno efficiente della macchina: essa si estende ad una ventina di numeri (non cifre), mentre sarebbe desiderabile che si estendesse a 1.000 - 5.000 numeri. All'aumento della memoria tendono appunto le nuove macchine in costruzione o in progetto.

Un altro organo essenziale è il « cervello elettronico » della macchina che raccoglie e pone in atto al momento opportuno le istruzioni preparate dall'operatore prima che inizi il funzionamento.

Quali problemi si possono risolvere con questa macchina? Certo moltissimi, dalla risoluzione di sistemi di equazioni lineari, all'integrazione di sistemi di equazioni differenziali o a derivate parziali con condizioni ai limiti estremamente varie. Ma ciò che è più interessante, e che finisce per influenzare lo stesso pensiero matematico, è che spesso bisogna o è conveniente porre il problema, la cui risoluzione è affidata alla macchina, in modo diverso da quello in cui di solito si pone e si risolve formalmente Così p. es. la risoluzione di un sistema di equazioni lineari (a coefficienti reali) si pone come la ricerca di minimo di una forma quadratica; l'integrazione di un'equazione differenziale è più agevole se si trasforma questa in una equazione integrale. In questo senso la macchina influenza il nostro modo di pensare: la classica impostazione infinitesimale dei problemi della fisica matematica cede il posto alla formulazione integrale o globale del fenomeno. Questa e non quella è direttamente accessibile alla macchina.

Si pensi all'enorme quantità di calcoli che richiede l'elaborazione di dati statistici, economici, sociali, medici, astronomici resi speditamente possibili dalla macchina calcolatrice: e allora essa apparirà qualche cosa di più di un semplice strumento; pur rimanendo tale, esso permette all'uomo di scienza sia di risparmiare tempo prezioso ad attività più elevate della sua mente, sia di ampliare l'insieme dei fenomeni sui quali può esercitare il suo dominio.

W. L. SUMMER: *Progress in Science.* (B. Blackwell, Oxford, 1946, pp. VIII + 176).

Il progresso scientifico nell'ultimo decennio, largamente stimolato e finanziato in rapporto alle necessità di guerra, è veramente affascinante. La scienza si è vista porre in questo periodo una quantità di problemi ai quali occorreva trovare rapidamente una soluzione: non solo nel campo bellico propriamente detto (e qui si attende che la saggezza umana ponga limitazioni alla potenza distruttiva raggiunta), ma nel campo dell'alimentazione, della genetica, della medicina, delle sostanze plastiche e di quelle tessili, della sociologia, dell'economia. La responsabilità dell'uomo di scienza rispetto al resto dell'umanità ne risulta enormemente aumentata e, qualunque sia la sua specialità di lavoro, egli non può più ignorarla. Spesso è proprio nelle scienze più astratte come la matematica, l'origine prima di invenzioni destinate a mutare radicalmente i modi di vita e i rapporti sociali.

Il libro del SUMMER offre un vasto panorama dei risultati conseguiti negli ultimi anni.

Panorama che è dominato dall'elettrochimica; è fantastico l'uso che può farsi degli elettroni in ogni campo: dall'analisi dei metalli alle valvole per radio; dalla liquefazione o saldatura dei metalli alla preparazione di vetri, gomme, alimenti speciali; dal microscopio elettronico (con ingrandimenti fino a 20.000 diametri) e dalle sue applicazioni in batteriologia al « radar » per localizzazioni di ostacoli e alle sue applicazioni alla navigazione aerea e alla fisica; dalla televisione al betatrone capace di produrre potenziali di 100 milioni di volta: e non è improbabile che con nuovi modelli si riesca a produrre raggi equivalenti a quelli cosmici.

La liberazione dell'energia atomica è il risultato più cospicuo raggiunto in quest'ordine di ricerche: la triste notorietà delle sue applicazioni distruttive (che son venute per prime) non esclude l'ammirazione per i risultati sia teorici (come l'equivalenza fra massa ed energia di EINSTEIN) sia sperimentali (come le prime disintegrazioni di atomi da parte di RUTHERFORD, la scoperta di varie particelle elementari, la costruzione del ciclotrone) di cui quella liberazione rappresenta la sintesi.

Risultati di enorme interesse pratico si sono ottenuti nella propulsione a reazione e nella creazione di sostanze plastiche con le più svariate caratteristiche; e nel campo della chemioterapia con la scoperta dei sulfamidici, della penicillina e di altri prodotti sintetici. Nel campo alimentare gli studi di genetica sia vegetale sia animale hanno fornito nuove specie con caratteristiche di resistenza e di sviluppo estremamente interessanti.

Su tutto questo vastissimo campo il volume del SUMMER dà informazioni precise, con notizie storiche, in un linguaggio da cui le difficoltà tecniche sono eliminate fin quanto è possibile. È un libro ricco di attrattiva, la cui lettura non può che giovare a chi s'interessa al progresso scientifico.

J. J. BURCKHARDT: *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie*, Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, vol. 13 (186 pagine, 56 figure). Basel, Birkhäuser, 1947.

Il fondamento matematico della cristallografia è dato dallo studio di certi gruppi discreti di movimenti nello spazio ordinario, la determinazione e classificazione dei quali è stata ottenuta oltre 50 anni or sono ad opera di A. SCHÖNFLIES ed E. VON FEDOROW. Il presente volume rielabora l'argomento in modo originale, valendosi abilmente dei grandi progressi che da allora ad oggi hanno conseguito le teorie delle matrici, dei reticolati, dei gruppi astratti e loro rappresentazioni. I molteplici legami fra queste teorie e l'argomento suddetto sono qui posti assai bene in luce, e l'esposizione — corredata da frequenti tabelle riassuntive — è notevole per snellezza e perspicuità.

Al centro della trattazione sta la nozione di *reticolato* (ted. *punktgitter*, ingl. *lattice*), così denominandosi ogni trasformato affine dell'insieme dei punti che, in un $S_n$ euclideo riferito ad assi cartesiani, hanno coordinate intere. Scopo precipuo del libro è la determinazione per $n = 2$, 3 di tutti i *gruppi di movimenti di* $S_n$ *trasformanti in sè un reticolato.*

Preso in $S_n$ un reticolato, siano $T$ e $G$ le totalità delle *traslazioni* e dei *movimenti* di $S_n$ che lo mutano in sè. Allora $T$ è un gruppo abeliano con $n$ generatori liberi, mentre $G$ è un gruppo avente $T$ come sottogruppo invariante e tale che $G/T$ risulta oloedricamente isomorfo ad un *gruppo finito di rotazioni* di $S_n$ trasformanti in sè un reticolato. Ogni gruppo siffatto determina una così detta *classe cristallografica geometrica* di $S_n$; associando poi al gruppo un reticolato invariante, ciò che in taluni casi può venir effettuato in più modi essenzialmente diversi, si ottiene una *classe cristallografica aritmetica*. Le diverse classi cristallografiche corrispondono ai vari gruppi finiti di sostituzioni o matrici ortogonali d'ordine $n$, trasformabili in sostituzioni o matrici a coefficienti interi; e lo stesso rimane valido, anche se in ciò che precede si sopprime la condizione dell'ortogonalità. Due gruppi di sostituzioni o matrici determinano la stessa classe *geometrica* se, e soltanto se, essi sono trasformabili l'uno nell'altro mediante una sostituzione lineare invertibile, che non è restrittivo supporre ortogonale. Due gruppi di sostituzioni o matrici a coefficienti interi determinano poi la medesima classe *aritmetica* se, e soltanto se, essi sono trasformabili l'uno nell'altro mediante una sostituzione lineare intera unimodulare.

Poggiando su questi risultati generali, qui stabiliti valendosi di teorie ausiliarie rapidamente richiamate in un capitolo introduttorio, l'autore determina anzitutto per $n = 2, 3$ tutte le classi cristallografiche geometriche. Da queste poi deduce le corrispondenti classi aritmetiche, alle quali pure giunge con metodo più diretto ed uniforme mediante l'introduzione della base ridotta di un reticolato, ottenuta col classico procedimento usato da MINKOWSKI nella sua Geometria dei numeri. Dalle classi aritmetiche deriva infine i vari gruppi cristallografici di movimenti, in numero di 17 nel piano e di 230 nello spazio.

Il procedimento qui adombrato non può venir esteso al caso $n \geq 4$.

Tuttavia l'autore ottiene per $n \geq 2$ certi gruppi di movimenti di $S_n$, rappresentabili mediante il gruppo ciclico d'ordine $n$ ed i gruppi totale od alterno di permutazioni su $n$ lettere.

Il libro contiene numerose indicazioni bibliografiche, ed è redatto in modo che — pur essendo stringato e rigoroso — può venir letto anche da chi non sia addentro alle teorie matematiche ivi impiegate. Esso dà alle teorie esposte una sistemazione che può ritenersi definitiva, incluso ciò che concerne la scelta delle notazioni. La veste tipografica è eccellente; ma le figure avrebbero forse potuto essere migliori.

BENIAMINO SEGRE