
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LORENZO CALARI

Sull'unità delle discipline algebriche (A proposito di un grande trattato)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 2
(1947), n.2, p. 140–147.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_2_140_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sull'unità delle discipline algebriche.

(A proposito di un nuovo grande trattato).

Nota di LORENZO CALABI (a Milano).

Sunto. - *Rapporti logici e relazioni di parentela tra le teorie algebriche. La topologia e la teoria degli insiemi ordinati nei loro rapporti con l'algebra. Come organizzare un'esposizione dell'algebra: metodo « sinottico » e metodo « logico »* Gli *Éléments de mathématique* di N. BOURBAKI: programma ed analisi metodologica.

1. La teoria degli insiemi, che studia le proprietà e le mutue relazioni delle riunioni di oggetti matematici, può essere costruita integralmente con la sola applicazione delle leggi del ragionamento alle nozioni di elemento e di insieme.

La teoria degli insiemi risulta pertanto così generale ed astratta da potersi identificare con una parte della logica matematica, detta anche algebra logica, se solo si voglia far corrispondere ad ogni insieme quella proprietà che caratterizza i suoi elementi.

Con la specificazione poi della natura degli elementi e della struttura degli insiemi, con l'enunciazione cioè di un certo numero di assiomi, la teoria degli insiemi si particularizza a volta a volta nelle singole varie discipline matematiche. Tanto che potremmo chiamare queste ultime collaterali o discendenti in relazione all'unico capostipite, la teoria degli insiemi, ad ai connubi successivi,

Collaterali appunto sarebbero le discipline di cui qui tocchiamo. l'algebra, la topologia generale e la teoria degli insiemi ordinati.

2. Per algebra si intende lo studio generale e particolare del calcolo: lo studio cioè delle relazioni tra gli elementi di uno o più dati insiemi indotte da leggi di composizione precedentemente definite, e delle strutture che coteste relazioni determinano sugli insiemi stessi.

Così per esempio appartiene all'algebra la teoria dei gruppi, giacchè un gruppo è un insieme avente la struttura determinata da una legge di composizione specificatamente definita; come appartiene all'algebra la teoria delle equazioni algebriche, calcolo in alcuni particolari gruppi.

Come nello stesso ramo discendente di una famiglia si conservano delle caratteristiche somatiche e di temperamento, colle modificazioni apportate da elementi estranei; così le varie « genera-

zioni algebriche », i vari capitoli dell'algebra che si seguono l'un l'altro con l'aggiunta successiva di nuovi assiomi, mantengono una somiglianza formale che rivela l'origine comune e l'uguale partecipazione ad un tutto unico.

E come nei vari stadi dell'evoluzione naturale gli organismi presentano spiccate simmetrie, pur mostrando un crescendo continuo nella complessità strutturale, così le varie teorie algebriche, pur complicandosi ed individualizzandosi sempre più, mantengono costante simmetria organica e formale.

La loro genesi storica non permette sempre di dimostrarne la parentela, che invece la loro genesi logica, ritrovata solo a posteriori, rende evidente: furono infatti per lo più necessità pratiche di studio di disparati problemi matematici che indussero alla « creazione » di coteste teorie. Solo alcune di esse assurgendo poi a discipline astratte svelarono le loro caratteristiche comuni, talora studiate con lo scopo precipuo di trovare un unico calcolo che tutte le comprendesse. Dovendo perciò far astrazione dalle particolarità dei singoli calcoli, si dovette tornare al comune punto di partenza, la teoria degli insiemi.

3. Lateralmente all'algebra, deriva dalla teoria degli insiemi la topologia generale, che non può essere considerata come parte dell'algebra stessa, poichè non studia relazioni di calcolo, bensì relazioni di posizione, si interessa cioè di un campo affatto diverso per quanto sempre di elementi e di insiemi. E come l'algebra, anche la topologia generale dà luogo a diverse teorie discendenti, nelle quali il numero degli assiomi limitanti la natura e la posizione reciproca degli elementi, o la struttura degli insiemi, aumenta via via. (È forse qui interessante notare che, contrariamente all'algebra, la topologia generale è stata in genere studiata come un tutto organico, ad eccezione di ben pochi suoi capitoli).

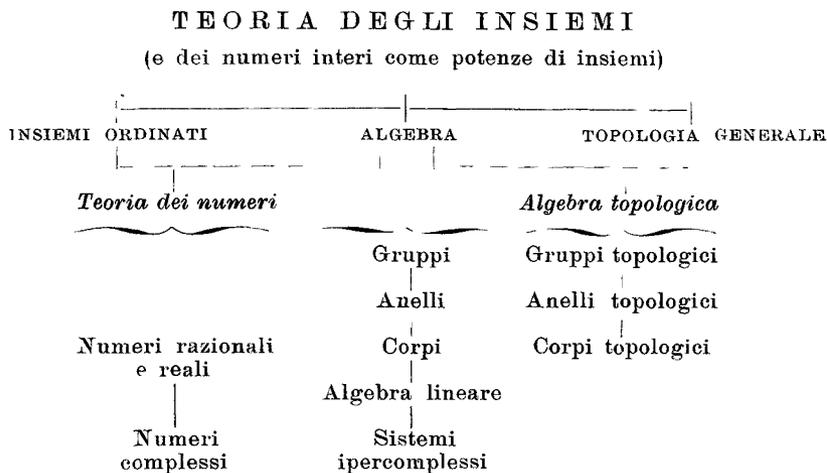
Costruendo l'algebra non più su insiemi qualsiasi bensì su insiemi topologici, si ottiene l'algebra topologica, frutto dunque del connubio tra le due grandi linee collaterali; per l'importanza delle applicazioni si dà molto più peso alla prima, ottenendo così una divisione dell'algebra topologica in capitoli paralleli a quelli dell'algebra.

Arricchendo la teoria degli insiemi col concetto d'ordine, si ottiene un terzo ramo laterale: la teoria degli insiemi ordinati. Ramo corto perchè non dotato di molti capitoli, ma grosso, la

nozione di ordine essendo, per quanto feconda ed importante, assai poco restrittiva.

Coll'innesto sull'algebra, essa dà luogo alla teoria dei numeri.

4. Schematicamente, ed in particolare tacendo la suddivisione della topologia generale, che nel nostro schema si riprodurrebbe in ogni parte dell'algebra topologica, i rapporti logici delle teorie e dei loro capitoli più importanti possono essere così rappresentati:



Ciò che sopra si è accennato circa l'unità dell'algebra e circa i rapporti tra i suoi capitoli, si può senza restrizioni o difficoltà estendere all'insieme delle discipline graficamente rappresentate ed alle loro suddivisioni.

È questo una conseguenza soprattutto della forza della struttura algebrica, che imprime loro caratteri relevantissimi per natura ed utilità.

È chiaro d'altra parte che questi rapporti non possono apparire sempre con l'evidenza che hanno nell'algebra, per la parallela influenza di altre forze come quella, fecondissima, della struttura di insieme ordinato.

5. Chi, avendo studiato alcune di queste discipline, il più delle volte per scopi pratici, in gruppi separati, con metodi e notazioni diverse, intravede il loro parallelismo formale e ne sente intuitivamente l'unità logica, vien portato a desiderare un'opera che gli mostri chiaramente, rigorosamente ed integralmente la verità di ciò che aveva intuito.

Se esistesse, una tale opera non solo appagherebbe cotesto suo legittimo desiderio, ma gli darebbe anche le più solide basi logiche per lo studio algebrico, la ragione ed il significato di quanto gli poteva essere apparso arbitrario o ingiustificato, e gli faciliterebbe per via analogica il progresso nelle discipline affini.

Un'esposizione dell'algebra così generalmente concepita si può fare, mi sembra, in due diversi modi.

Il primo metodo sarebbe quello di esporre contemporaneamente la teoria degli insiemi e tutte le teorie algebriche da essa derivanti, facendo opera analoga a quei libri di geometria proiettiva nei quali le teorie duali vengono condotte di pari passo sulle stesse pagine; o analoga a quelle sinossi degli Evangeli che portano i tre sinottici in parallelismo grafico di contenuto, invertendo ove sia necessario l'ordine narrativo di uno di essi per seguire un unico ordine cronologico.

. Bisognerebbe dividere ogni pagina in una parte superiore dedicata alla teoria degli insiemi ed in una inferiore, divisa in colonne, per le singole discipline algebriche. Ogni pagina porterebbe i passi collegati tra loro da rapporti di dipendenza e di parallelismo.

Non sarebbe certo molto facile la composizione di un simile libro; ma se ci si sapesse limitare a quelle parti delle singole teorie che più danno risalto alla interdipendenza logica e più manifestano le direzioni di sviluppo, si farebbe opera di importanza e di interesse non comuni.

Chè l'aver contemporaneamente sotto agli occhi, riunite secondo i loro punti di contatto, tutte le discipline algebriche illuminerebbe ognuna di esse ed il loro insieme di luce ben viva. Nè sembra improbabile che in questo parallelismo appaiano così delle lacune che potrebbero essere per analogia facilmente colmate. O non si intravedano direzioni per nuove ricerche, cui antecedentemente era mancato lo stimolo.

E se anche ciò non dovesse verificarsi, non sarebbe forse egualmente d'utilità per la scienza una così fatta sintesi?

Non è di per sè stesso un notevole bene l'appagamento di « quella aspirazione profonda che la mente umana cerca di soddisfare nel progresso della scienza », di « quella che mira a comprendere tutto il reale come una unità »? (ENRIQUES, *Storia della logica*, pag. 285).

6. Il secondo modo sarebbe quello di trattare con unità di metodo e di terminologia la teoria degli insiemi, l'algebra ed i

suoi due rami affini, uno dopo l'altro, seguendo il loro ordine logico. Trattazione con metodo normale, quindi, ma di un complesso di materia del tutto inconsueto.

È il metodo seguito da N. BOURBAKI nella sua gigantesca opera intitolata modestamente *Eléments de mathématique*, che dovrà trattare con rigore assoluto tutta la matematica.

Il piano è così grandioso, i volumi pubblicati sono così pregevoli che ci par necessario sommariamente descriverli prima di considerarli dal punto di vista di questo articolo.

La prima parte degli *Eléments, Les structures fondamentales de l'analyse*, di cui per ora si sono pubblicati quattro tomi, si suddivide in più di una mezza dozzina di libri, dedicato ciascuno allo studio di una struttura.

Il libro I riguarda la teoria degli insiemi (ne è apparso solo il « Fascicule des résultats », 1939); il libro II l'algebra (pubblicato il cap. I: *Structures algébriques* (1942); seguiranno altri otto capitoli trattanti l'algebra lineare, i sistemi ipercomplessi, l'anello dei polinomi, la teoria dei numeri, i corpi, le forme e le geometrie elementari); il libro III la topologia generale (pubblicati i capp. 1: *Structures topologiques*; 2: *Structures uniformes* (1940); 3: *Groupes topologiques*; 4: *Nombres réels* (1942); di prossima apparizione i capp. 5 e 6 su importanti applicazioni; restano ancora due capitoli sugli spazi metrici e sulle funzioni continue). Gli altri libri di questa prima parte verteranno sulla teoria dell'integrazione, la topologia combinatoria (o algebrica), i differenziali ed i loro integrali, ecc. (1).

Un simile programma per la prima parte di un'opera pare l'indice di un'enciclopedia cui vari autori collaborano; chi è dunque questo signor NIKOLAS BOURBAKI che affronta tale compito immane?

BOURBAKI non è che il nome di penna comune ad una diecina di eminenti professori della scuola francese che scrivono, lavorano, pensano con così perfetta collegialità da render impossibile la distinzione delle loro singole individualità nei vari volumi dell'opera. Il fatto è così straordinario, sia dal punto di vista storico scientifico come da quello psicologico, da far persino dubitare se così potrà essere per tutta l'opera programmata, secondo lo schema tanto rigorosamente e particolareggiatamente determinato.

(1) L'opera è pubblicata da HERMANN, Parigi, nella serie « Actualités scientifiques et industrielles ».

Nel foglio d'invio « Mode d'emploi de ce traité », troviamo tracciata una sintesi del programma, illustrato e giustificato il metodo dell'esposizione, spiegate alcune nuove forme di disposizione e di grafia.

È bisogna subito dire che i volumi pubblicati mostrano che il programma e le direttive generali sono seguiti in tutti i loro punti con piena fedeltà, e ne mettono in rilievo pregi incontestabili.

La rigosità logica è resa costantemente palese da quella del linguaggio. Dimostrazioni rigorose e particolareggiate sono date per tutti quei teoremi, proposizioni o proprietà, che serviranno più tardi per l'ulteriore svolgimento della materia. Esse dimostrazioni si basano esclusivamente su nozioni, metodi e risultati già acquisiti e non anticipano alcunchè; quando degli esempi o degli schiarimenti si riferiscono a nozioni che il lettore facilmente può conoscere, ma che non sono state ancora ottenute, uno speciale asterisco ne avverte.

Come ciò rivela in tutta la sua cura l'ossequio al fine pedagogico, lo scrupolo di imparzialità è manifesto dall'avvertire i lettori ogni volta che la dimostrazione richiede l'accettazione del postulato di ZERMELO.

Alla rigosità di metodo fa riscontro quella di linguaggio che esclude, senza cadere nella pedanteria e nell'oscurità, ogni abuso di parole come di simboli e che di conseguenza introduce termini e segni nuovi e delimita il significato di quelli usuali.

Con grande cura i BOURBAKI vagliano, perfezionano e completano il vocabolario del gergo usuale; lavoro di grande importanza e, soprattutto in questo caso, di grande portata pratica, non solo perchè gli autori lo estenderanno a tutta la matematica (dato che tale sarà la materia degli *Eléments*), ma anche perchè essi per la loro autorità e per il loro numero sono in grado di estenderne i risultati a tutta la scuola francese. Chiunque abbia studiato un poco le discipline matematiche moderne sulle note originali, sa che pregio possa rappresentare una unificazione terminologica.

Abbiamo già accennato alle preoccupazioni pedagogiche, ma altre manifestazioni ne vorremmo indicare.

Un « fascicule des résultats » è pubblicato per il primo libro (ed è previsto per i successivi) per dare uno sguardo d'insieme a chi si accinga allo studio particolareggiato, e per far conoscere i risultati della teoria senza richiedere troppo tempo.

Alla fine di ogni capitolo sono poste delle « notes historiques », che permettono di inquadrarlo nella storia della matematica e di

conoscere (anche se solo per sommi capi) l'origine e lo sviluppo storico della materia studiata.

Alla fine di quasi ogni paragrafo i numerosissimi esercizi non solo danno al lettore un controllo di quanto ha appreso, ma mirano a completare la teoria forzatamente esposta nelle sole linee generali ed a mostrarne le applicazioni pratiche più conosciute.

A dare aspetti noti delle generalizzazioni molto spinte, e spesso per la maggior parte dei lettori anche nuove, valgono oltre agli esercizi molte esemplificazioni e tutti quei periodi, che cominciano « De manière plus imagée on peut dire... », « Autrement dit... » e simili. Queste frasi, frequenti soprattutto in topologia generale, ove è possibile alle volte dare persino un'immagine visiva, non sono che una traduzione in linguaggio volgare della formulazione esatta con termini di gergo, spesso molto oscura specialmente per i non specialisti.

Piccola novità, caratteristica perchè svela preoccupazioni ed esperienze più di Maestro che di insegnante, è un « S » rivoltato, riproduzione del segno « curva pericolosa » delle strade automobilistiche. Posto in evidenza al margine del foglio, ha lo scopo di richiamare l'attenzione su punti di particolare importanza che il lettore potrebbe non avvertire: ad esempio in casi di non deducibilità logica malgrado le apparenze, di dissimulata differenza di enti, di assenza di proprietà che sembrerebbero attribuibili.

Ottimo accorgimento, atto ad agevolare lo studio del trattato, sono le pagine ripiegate in fondo ai volumi, a modo di certe tavole di illustrazioni, contenenti definizioni ed assiomi da tener presenti nel corso della lettura.

Pure in fondo ad ogni volume vi è un indice delle notazioni non ancora usate nei tomi precedenti ed uno dei termini principali, con l'indicazione della pagina della loro definizione. Due indici quanto mai utili, e che nei libri italiani e francesi mancano troppo spesso.

Alla fine di ogni libro figurerà un dizionario ragionato dei termini scientifici e delle loro traduzioni nelle principali lingue ⁽²⁾.

Anche la forma tipografica è particolarmente chiara: i numerosi diversi caratteri, le spaziature, i margini di diversa larghezza, ed il loro uso coerente, fanno strano contrasto con libri francesi

(²) L'unico dizionario matematico esistente, a mia saputa, data dal 1900; è francese-tedesco e viceversa, e assai incompleto.

pure ottimi come quelli di Gauthier-Villars o con molti, troppi, italiani.

Mi si permetta qui solo un'osservazione che si potrebbe fare alla quasi totalità dei libri matematici. Perché i caratteri gotici ed alcuni simboli sono più grossi e neri degli altri? ciò dà alla pagina una irrequietezza stanchevole, e priva della possibilità di giovare della differenza di aspetto per esprimere differenza di significato, come i Bourbaki stessi fanno per alcuni caratteri latini.

7. Se ora torniamo al nostro problema di esporre l'algebra e le due teorie affini in modo unitario, ci dobbiamo porre la domanda: in qual modo hanno risolto questo problema i Bourbaki? evidentemente seguendo la genesi logica, con unità di metodo e di espressioni; nè potevano far diversamente per una trattazione di tutta la matematica.

Per vincere le diverse difficoltà didattiche essi impiegano quei vari accorgimenti cui sopra abbiamo accennato; tra i quali però non si trova, nella parte sin'ora pubblicata, nemmeno uno schema, una tavola che presenti allo studioso l'interdipendenza logica delle varie teorie.

È ben naturalmente perché il testo non vi fa alcun esplicito riferimento.

Questa constatazione fatta su un'opera che difficilmente può essere superata per grandiosità di intenti, di mezzi e di risultati, permette di escludere la possibilità di porre in evidenza con uguale metodo il parallelismo formale e l'unità logica delle teorie algebriche.

Tanto più che i suoi autori sono palesemente ben consci (occorre dirlo?) di cotesto parallelismo: si osservi ad esempio l'uguaglianza e la corrispondenza dei titoli dei capitoli e dei paragrafi delle teorie degli insiemi, dei gruppi, degli anelli e dei corpi; ma il lettore normale difficilmente, credo, se ne avvedrà.

Per obbligarlo a porre tutta la sua attenzione sul fatto dell'unità logica e formale, per obbligarlo a considerarne le cause e le conseguenze, a trarne le possibilità dei reciproci complementi e dei nuovi sviluppi, occorrerebbe proprio, dunque, tentare un'altra esposizione dell'algebra, secondo il metodo che potrebbe dirsi sinottico.