Bollettino Unione Matematica Italiana

Gaetano Fichera

Alcune osservazioni sulle condizini di stabilità per le equazioni algebriche a coefficienti reali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.2, p. 103–109.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_2_103_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1947.

Alcune osservazioni sulle condizioni di stabilità per le equazioni algebriche a coefficienti reali (*).

Nota di GAETANO FICHERA (a Roma).

Sunto. - *Si fa vedere come il Teorema di stabilità di* ROUTH *derivi quasi immediatamente da un noto lemma di* OBRESCHKOFF. *Si indica un procedimento che permette di applicare agevolmente ai casi pratici detto teorema, poichè si prescinde dalla conoscenza delle complicate espressioni letterali dei polinomi di stabilità (determinanti di* HURWITZ*).*

Dato un polinomio a coefficienti reali di grado n

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n ,$$

chiamansi *condizioni di stabilità* quelle a cui devono soddisfare i coefficienti di $f(z)$ perchè i suoi zeri abbiano tutti la parte reale

(13) La corrispondenza, subordinata da γ, fra i piani tangenti al cono principale e le coppie di rette coincidenti, è quindi (1, 2), *non* (1, 4), d'accordo col fatto che noi scartiamo i piani per la retta stazionaria i quali porterebbero in S_3' a coppie di rette coincidenti.

(14) Le coppie di rette per O', appartenenti al piano stazionario, costituite da una retta principale d e da un'altra retta ($\neq d$), ed esse soltanto, sono tali che dei quattro piani corrispondenti in γ, due soli sono distinti. Le due coppie costituite da una retta principale contata due volte sono eccezionali in quanto ad esse non corrisponde in γ nessun piano (avendo scartato quelli passanti per la retta stazionaria).

(15) Si può verificare che *le calotte del* 3° *ordine di centro* O *e tangenti ivi al piano Jacobiano sono trasformate da* T *in una stessa calotta.*

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

negativa. La dizione trae origine dalle questioni di meccanica vibratoria a cui tali condizioni sono connesse. Si dà anche il nome di *polinomio di* HURWITZ ad ogni polinomio per il quale si verifica la suddetta eventualità e ciò perchè HURWITZ ha assegnato nel 1895 ([1]) le condizioni necessarie e sufficienti affinchè $f(z)$ abbia tutti gli zeri di parte reale negativa. Com'è noto, però, tali condizioni erano anteriormente già state date, sotto forma diversa, dal matematico inglese ROUTH ( ) ed anzi l'applicazione ai casi numerici delle condizioni di stabilità di ROUTH — lievemente modificate — appare molto più comoda che non quella del teorema di HURWITZ. Credo quindi offra qualche interesse dare del teorema di ROUTH una semplice dimostrazione, tanto più che quella originale, data da quest' Autore, trae partito da alcune considerazioni alquanto vaghe ed imprecise. Mostrerò in questa breve Nota come il suddetto teorema discenda in modo quasi immediato da un noto lemma di OBRESCHKOFF ([3]) sui polinomi di HURWITZ.

Valendomi poi di alcune eguaglianze stabilite dal BOMPIANI ([4]), confronterò le condizioni di stabilità di ROUTH e di HURWITZ con quelle proposte di recente da COUFFIGNAL in una sua interessante Memoria ([5]) nella quale perviene ad indicare dei rapidi procedimenti per scrivere le più semplici condizioni di stabilità per un polinomio a coefficienti letterali.

Tali condizioni consistono nell'esser di segno positivo alcune funzioni razionali intere *(polinomi di stabilità)* nei coefficienti di $f(z)$, funzioni di cui HURWITZ dà un'elegante espressione per mezzo di determinanti, la quale però appare di poco pratica utilità es-

([1]) A. HURWITZ, *Ueber die Bedingungen unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt*, «Mathematische Annalen». 46 (1895), pp. 273-284.

([2]) E. J. ROUTH, *A treatise on the stabilty of a given state of motion*, « Macmillan and Co. ». London (1877), pp. 23-44.

([3]) N. OBRESCHKOFF, *Ueber algebraische Gleichungen, die nur Wurzeln mit negativen Realteilen besitzen*, « Mathematische Zeitschrift ». 45 (1939) pp. 747-750. Per una trattazione d'insieme dell'argomento e complementi cfr. ad es. M. PICONE, *Lezioni di Algebra*, « Veschi ». Roma (1945) n. 27. Cfr. anche G. MIGNOSI, *Contributo italiano al problema di stabilità di Hurwitz sulle equazioni algebriche a coefficienti reali e radici di ascissa negativa*, « Acc. di Scienze, lettere ed arti ». Palermo (1941).

([4]) E. BOMPIANI, *Sulle condizioni sotto le quali una equazione algebrica a coefficienti reali ammette solo radici con parte reale negativa*, « Giornale di Matematiche ». V. 49 (1912), pp. 33-39.

([5]) L. COUFFIGNAL, *Recherches de mathématiques utilisables - Sur les conditions de stabilité des sistèmes oscillants*, « La Revue Scientifique ». N. 3244 (Mai 1945), pp. 195-210 sendo ben disagevole lo sviluppo di questi. D'altra parte, nelle applicazioni ai problemi della tecnica, è necessario conoscere le funzioni razionali in discorso e ciò perchè il problema che in pratica si presenta è il seguente: assegnata l'equazione differenziale nella funzione incognita u, $\sum_{k=0}^{n} a_k(v) \frac{d^k u}{dt^k} = 0$, i cui coefficienti dipendono dal parametro v, quali sono i valori di v per i quali, qualunque sia la soluzione $u(t)$ dell'equazione si abbia

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0,$$

o, ciò che è lo stesso, per i quali le radici dell'equazione caratteristica $\sum_{k=0}^{n} a_k(v) z^k = 0$ abbiano parte reale negativa?

Il teorema di Routh, nella forma in cui viene qui dimostrato. suggerisce un procedimento per la risoluzione del detto problema, la cui applicazione può utilmente giovare in pratica, dato che esso prescinde dalla conoscenza delle espressioni letterali, ben complicate, dei polinomi di stabilità.

* * *

Lemma di Obreschkoff. – *Se* a_0 *e* a_1 *sono positivi, condizione necessaria e sufficiente perchè il polinomio* f(z) *sia di* Hurwitz *è che il polinomio di grado* $n-1$

$$f^*(z) = a_0^* + a_1^* z + a_2^* z^2 + \dots + a^*_{n-1} z^{n-1}$$

con

$$a_k^* \begin{cases} = a_1 a_{k+1} - a_0 a_{k+2}, & \text{se } k \text{ è dispari} \\ = a_{k+1}, & \text{se } k \text{ è pari} \\ & (a_{n+1} = 0) \end{cases}$$

sia di Hurwitz.

Tale lemma fornisce immediatamente la possibilità di dimostrare il

Teorema di Routh. - *Si consideri il seguente quadro di numeri*

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} \alpha_{00} & \alpha_{10} & \alpha_{20} & \alpha_{30} & \dots \\ \alpha_{01} & \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \dots \\ \alpha_{02} & \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{0\gamma} & \alpha_{1\gamma} & \alpha_{2\gamma} & \alpha_{3\gamma} & \dots \end{array} \right.$$

nel quale le prime due righe sono le seguenti

$$\begin{array}{lllll} a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \end{array}$$

con $a_{n+k} = 0$ *per* $k > 0$, *ed essendo inoltre per* $j > 1$

$$\alpha_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_{i+1\, j-2} & \alpha_{0\, j-2} \\ \alpha_{i+1\, j-1} & \alpha_{0\, j-1} \end{vmatrix}$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè il polinomio $f(z)$ *con* $a_0 > 0$, *sia di* HURWITZ *è che sian tutti positivi i numeri*

$$(2) \qquad \alpha_{01}, \quad \alpha_{02}, \ldots, \alpha_{0\, n-1}, \quad \alpha_{0\, n}.$$

La condizione è sufficiente. Si considerino i polinomi:

$$\varphi_0(z) = f(z) = \alpha_{00} + \alpha_{01} z + \alpha_{10} z^2 + \alpha_{11} z^3 + \alpha_{20} z^4 + \alpha_{21} z^5 + \ldots$$
$$\varphi_1(z) = f^*(z) = \alpha_{01} + \alpha_{02} z + \alpha_{11} z^2 + \alpha_{12} z^3 + \alpha_{21} z^4 + \alpha_{22} z^5 + \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_m(z) = \qquad \alpha_{0\, m} + \alpha_{0\, m+1} z + \alpha_{1\, m} z^2 + \alpha_{1\, m+1} z^3 + \alpha_{2\, m} z^4 + \alpha_{2\, m+1} z^5 + \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il polinomio $\varphi_m(z)$ è di grado $n - m$ e se esso è di HURWITZ tale riesce, per il lemma precedente, $\varphi_{m-1}(z)$. Pertanto, poichè

$$\varphi_{n-1}(z) = \alpha_{0\, n-1} + \alpha_{0\, n} z$$

è di HURWITZ essendo i suoi coefficienti positivi, tale riesce $f(z)$.

La necessità della condizione è evidente. Sempre per il lemma precedente segue che, essendo di HURWITZ $f(z)$, tali sono i polinomi $\varphi_m(z)$, epperò i loro coefficienti sono tutti positivi, tali, quindi, riescono, in particolare, i numeri (2).

* * *

Consideriamo il seguente quadro di numeri

$$(3) \qquad \left\{ \begin{matrix} \beta_{00} & \beta_{10} & \beta_{20} & \beta_{30} & \cdots \\ \beta_{01} & \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} & \cdots \\ \beta_{02} & \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{0j} & \beta_{1j} & \beta_{2j} & \beta_{3j} & \cdots \end{matrix} \right.$$

nel quale le prime due righe coincidono con le prime due del quadro (1) mentre per $j > 1$, si ha

$$\beta_{ij} = \frac{1}{\beta_{0\, j-1}} \begin{vmatrix} \beta_{i+1\, j-2} & \beta_{0\, j-2} \\ \beta_{i+1\, j-1} & \beta_{0\, j-1} \end{vmatrix}.$$

Com'è facile constatare sussistono le seguenti relazioni

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \beta_{01} = \alpha_{01}, \quad \beta_{02} = \frac{\alpha_{02}}{\alpha_{01}}, \quad \beta_{03} = \frac{\alpha_{03}}{\alpha_{02}}, \quad \beta_{04} = \frac{\alpha_{04}}{\alpha_{01}\alpha_{03}}, \quad \beta_{05} = \frac{\alpha_{05}}{\alpha_{02}\alpha_{04}}, \ldots \\ & \ldots \quad \beta_{0\, 2m} = \frac{\alpha_{0\, 2m}}{\alpha_{01}\alpha_{03}\cdots\alpha_{0\, 2m-1}}, \quad \beta_{0\, 2m+1} = \frac{\alpha_{0\, 2m+1}}{\alpha_{02}\alpha_{04}\cdots\alpha_{0\, 2m}}, \ldots \end{aligned} \right.$$

Nell'enunciato del teorema di ROUTH i numeri (2) possono pertanto essere sostituiti con quelli di ugual posto del quadro (3).

Effettivamente ROUTH nella dimostrazione originale del suo teorema considera il quadro (3) anzichè il quadro (1). Appare tuttavia preferibile far uso di questo, dato che si perviene al calcolo dei suoi termini con un numero minore di operazioni.

Indichiamo con D_i il determinante di HURWITZ di ordine i, cioè il minore formato con le prime i righe e le prime i colonne della seguente matrice

$$\left\| \begin{array}{cccccc} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & \dots 0 \\ a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} & \dots a_n \end{array} \right\|$$

$(a_{n+k} = 0,$ per $k > 0)$. La condizione $D_1 > 0$, $D_2 > 0, \dots D_{n-1} > 0$, $D_n > 0$ è necessaria e sufficiente perchè $f(z)$ sia di HURWITZ. Anzi poichè si ha

$$D_n = a_n D_{n-1}$$

se è $a_n > 0$, occorre e basta che siano positivi i primi $n-1$ di tali determinanti. È stato dimostrato dal BOMPIANI [6] che sussistono le seguenti eguaglianze:

$$D_i = \beta_{01}\beta_{02}\dots\beta_{0i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Per le (4) segue allora

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_1 = \alpha_{01}, \quad D_2 = \alpha_{02}, \quad D_3 = \alpha_{03}, \quad D_4 = \dfrac{\alpha_{04}}{\alpha_{01}}, \quad D_5 = \dfrac{\alpha_{05}}{\alpha_{01}\alpha_{02}}, \dots \\ \dots D_{2m} = \dfrac{\alpha_{0\,2m}}{\alpha_{01}^{m-1}\alpha_{02}^{m-2}\alpha_{03}^{m-2}\dots\alpha^2_{0\,2m-5}\,\alpha_{0\,2m-4}\,\alpha_{0\,2m-3}}, \quad D_{2m+1} = \\ \qquad = \dfrac{\alpha_{0\,2m+1}}{\alpha_{01}^{m-1}\alpha_{02}^{m-1}\alpha_{03}^{m-2}\dots\alpha^2_{0\,2m-4}\,\alpha_{0\,2m-3}\,\alpha_{0\,2m-2}}. \end{array} \right.$$

Si vede quindi che il polinomio α_{0i} nelle variabili $a_0, a_1, \dots, a_n$ è multiplo di D_i. Appare pertanto che l'applicazione del teorema di ROUTH conduce a delle espressioni analitiche più complicate di quelle che si ottengono mercè lo sviluppo dei determinanti di HURWITZ. Per ovviare a tale inconveniente di COUFFIGNAL, considera un quadro di numeri γ_{ij} in cui le prime quattro righe sono

(6) E. BOMPIANI, loc. cit. (4).

eguali a quelle del quadro (1), mentre per $j > 3$ si ha

(6) $$\gamma_{ij} = \frac{1}{\gamma_{0\,j-3}} \begin{vmatrix} \gamma_{i+1\,j-2} & \gamma_{0\,j-2} \\ \gamma_{i+1\,j-1} & \gamma_{0\,j-1} \end{vmatrix}.$$

Egli dimostra che i numeri α_{0i} sono rispettivamente eguali ai determinanti D_i a meno di un fattore costante, ma si può addirittura affermare che si ha

$$\gamma_{0j} = D_j$$

Ciò segue — com'è facile constatare — esprimendo i numeri γ_{ij} per mezzo di quelli del quadro (1) e tenendo presenti le (5).

Si ha allora

$$\gamma_{i0} = \alpha_{i0}, \quad \gamma_{i1} = \alpha_{i1}, \quad \gamma_{i2} = \alpha_{i2}, \quad \gamma_{i3} = \alpha_{i3},$$

$$\gamma_{i4} = \frac{\alpha_{i4}}{\alpha_{01}}, \quad \gamma_{i5} = \frac{\alpha_{i5}}{\alpha_{01}\alpha_{02}}, \quad \gamma_{i6} = \frac{\alpha_{i6}}{\alpha_{01}^2\alpha_{02}^2\alpha_{03}}, \quad \text{etc.}.$$

e in particolare

$$\gamma_{01} = D_1, \quad \gamma_{02} = D_2, \quad \gamma_{03} = D_3, \quad \gamma_{04} = D_4, \quad \text{etc.}.$$

Nel caso in cui i coefficienti a_k siano dei numeri è però senz'altro preferibile far uso del quadro (1), dato che per il calcolo dei valori che compaiono in esso, si ha da eseguire un numero minore di operazioni rispetto a quello necessario per calcolare i numeri β_{ij} o γ_{ij} degli altri quadri.

Sia $n = 2p + 1$. La seguente tabella mostra il numero complessivo delle sommè e dei prodotti che bisogna eseguire per calcolare i numeri che compaiono nelle righe dei vari indici

Indice della riga	Numero delle somme	Numero dei prodotti
2	p	$2p$
3	$p-1$	$2p-1$
4	$p-1$	$2p-2$
5	$p-2$	$2p-3$
6	$p-2$	$2p-4$
.....	....	....
$2p-1$	1	3
$2p$	1	2
$2p+1$	0	1

Si devono quindi complessivamente eseguire p^2 somme e $p(2p+1)$ prodotti per calcolare tutti i numeri del quadro. Analogamente si vede che se è $n = 2p$ il numero complessivo delle somme è $p(p-1)$ e quello dei prodotti $p(2p-1)$.

È bene tener presente che se si moltiplicano i numeri della riga j-esima del quadro (1) per una costante ρ, quelli della riga di indice $j + 1$, risultano moltiplicati per ρ, quelli della $(j + 2)$-esima per ρ^2, della $(j + 3)$-esima per ρ^3 ecc. ... Tale osservazione consente di operare sempre con numeri non molti grandi, perchè nell'eseguire i calcoli, appena si pervenga ad una riga con numeri elevati, è lecito dividerli per un conveniente numero positivo e passare quindi al calcolo dei numeri delle successive righe.

Poichè quando il polinomio $f(z)$ è di HURWITZ devono essere tutti positivi i numeri del quadro — come segue dalla dimostrazione del teorema di ROUTH — se nel calcolarli si perviene ad un numero α_{ij} non positivo — anche non appartenente alla prima colonna — è inutile proseguire oltre perchè certamente $f(z)$ non è di HURWITZ.

Supponiamo ora che i coefficienti di $f(z)$ siano funzioni continue del parametro v, tali allora saranno $\alpha_{01}, \alpha_{02}, \dots, \alpha_{0n}$. Il loro calcolo per ogni fissato v si esegue però rapidamente mediante il quadro (1), appare quindi non difficile approssimare, per esempio, con metodo dicotomico, i valori di δ che annullano dette funzioni e conseguentemente determinare gli intervalli nei quali esse sono tutte positive, e ciò senza servirsi delle espressioni letterali dei polinomi di stabilità.