Bollettino Unione Matematica Italiana

Buchin Su

Alcuni invarianti di contatto di due varietà in uno spazio proiettivo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.1, p. 9–12.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_1_9_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1947.

Alcuni invarianti di contatto di due varietà in uno spazio proiettivo.

Nota di BUCHIN SU (a Hangchow).

Sunto: *Ulteriore estensione di un teorema di* B. SEGRE *sugli invarianti di contatto.*

Ho già considerato, come estensione di un teorema di B. SEGRE [1], due curve di S_n aventi in comune un punto e gli spazi osculatori fino allo S_k, $k \leq n$ [2], e dato per esse $k-1$ invarianti di contatto [3]. È naturale cercare di estendere i risultati al caso di due varietà ad m dimensioni. Mostreremo qui l'esistenza di $k-1$ invarianti proiettivi per due varietà aventi in un punto comune gli stessi spazi r — osculatori, $r = 1, \ldots, k$, di dimensione massima

$$d_r = \binom{m+r}{r} - 1.$$

Possiamo sempre rappresentare una V_m di S_n nell'intorno di un suo punto O con equazioni del tipo

$$x^\alpha = f^\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^m), \tag{1}$$

ove $\alpha = m+1, \ldots, n$ [4], in modo che lo $S_{d_1} \equiv S_m$ tangente in O abbia le equazioni

$$X^\alpha = 0,$$

sicchè in O

$$x^\alpha{}_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^a}\right)_0 = 0, \quad a = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Si consideri ora lo spazio 2 — osculatore $S(2)$ in O; per le (3) esso

[1] B. SEGRE: *Sugli elementi curvilinei che hanno comuni le origini ed i relativi spazi osculatori,* « Rend. Acc. Lincei », (VI), 22 (1935_2), 392-399.

[2] B. SU: *Note on a theorem of B. Segre,* « Science Record », Academia Sinica, 1 (1942), 16-19.

[3] Si veda pure B. SEGRE: *On tac-invariants of two curves in a projective space,* « Quart. Journal of Math. », Oxford Series, 17 (1946), 35-38; e B. SU: *On certain tac-invariants of two curves in a projective space,* ibidem, 17 (1946), 116-118.

[4] Gli indici *greci* prendono i valori $m+1$, $m+2, \ldots, n$; quelli *latini* i valori $1, 2, \ldots, m$.

è rappresentato dalle equazioni

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} X^{m+1} & \dots & X^{d_2} & X^{D_2} \\ \left(\dfrac{\partial^2 x^{m+1}}{\partial x^a \partial x^b}\right)_0 & \dots & \left(\dfrac{\partial^2 x^{d_2}}{\partial x^a \partial x^b}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial^2 x^{D_2}}{\partial x^a \partial x^b}\right)_0 \end{vmatrix} = 0$$

con $D_2 = d_2 + 1, \dots, n$, e $a, b = 1, \dots, m$: il determinante simboleggiato a primo membro è d'ordine $\frac{1}{2} m(m+1)+1$. Si possono scegliere le coordinate in modo che lo $S(2)$ sia rappresentato da

$$(5)\qquad X^{D_2} = 0,$$

e perciò

$$(6)\qquad \left(\frac{\partial^2 x^{D_2}}{\partial x^a \partial x^b}\right)_0 = 0,$$

mentre è

$$D = \left| \frac{\partial^2 x^{m+1}}{\partial x^a \partial x^b} \dots \frac{\partial^2 x^{d_2}}{\partial x^a \partial x^b} \right|_0 \neq 0.$$

Procedendo similmente per gli altri spazi osculatori possiamo dare ad $S(r)$, $r = 1, \dots, k$, le equazioni

$$(7)\qquad X^{D_r} = 0$$

e con ciò

$$(8)\qquad \left(\frac{\partial^r x^{D_r}}{\partial x^{a_1} \dots \partial x^{a_r}}\right)_0 = 0, \qquad a_1, \dots, a_r = 1, \dots m.$$

Gli sviluppi in serie di V_m nell'intorno di O sono allora della forma:

$$(9)\qquad \begin{cases} x^{d_r+1} = \sum\limits_{(a_1 \dots a_{r+1})} p^{d_r+1}_{a(r+1)} x^{a_1} \dots x^{a_{r+1}} + \dots \\ x^{d_r+2} = \sum\limits_{(a_1 \dots a_{r+1})} p^{d_r+2}_{a(r+1)} x^{a_1} \dots x^{a_{r+1}} + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^{d_{r+1}} = \sum\limits_{(a_1 \dots a_{r+1})} p^{d_{r+1}}_{a(r+1)} x^{a_1} \dots x^{a_{r+1}} + \dots & (r = 1, 2, \dots, k-1) \\ x^D \;= \sum\limits_{(a_1 \dots a_{k+1})} p^{D}_{a(k+1)} x^{a_1} \dots x^{a_{k+1}} + \dots & (D = d_k + 1, \dots, n) \end{cases}$$

ove i coefficienti

$$(10)\qquad p^M_{a(L)} = p^M_{a_1 a_2 \dots a_L}$$

sono simmetrici rispetto agli indici in basso e le Σ sono estese alle combinazioni con ripetizione degli indici; i termini non scritti sono di ordine superiore rispetto a quelli scritti.

Introduciamo i determinanti

$$\Delta_r = \left| p^{d_r+1}_{a(r+1)} \; p^{d_r+2}_{a(r+1)} \; \cdots \; p^{d_{r+1}}_{a(r+1)} \right| \tag{11}$$

di ordine $d_{r+1} - d_r = \binom{m+r}{r+1}$.

Per due varietà V_m e $\bar{V}_m$ che abbiano in O gli stessi $S(r)$ osculatori, $r = 1, \dots, k$, di dimensioni normali $d_1, \dots, d_k$, si possono assumere sviluppi dello stesso tipo (9), indicandone i coefficienti rispettivi con $p^M_{a_1 \dots a_L}$ e con $\bar{p}^M_{a_1 \dots a_L}$; introduciamo ancora i determinanti

$$\bar{\Delta}_r = \left| \bar{p}^{d_r+1}_{a(r+1)} \; \bar{p}^{d_r+2}_{a(r+1)} \; \cdots \; \bar{p}^{d_{r+1}}_{a(r+1)} \right|, \tag{12}$$

e proviamo che

I k − 1 *rapporti*

$$I_r \equiv \Delta_r : \bar{\Delta}_r \quad \left(r = 1, \dots, k-1; \quad k > 1; \quad \binom{m+k}{k} \leq n+1\right) \tag{13}$$

sono invarianti proiettivi di contatto di V_m *e* $\bar{V}_m$ *in* O.

Allo scopo si consideri la più generale collineazione (non degenere) che lasci fissi il punto O e i successivi spazi osculatori fino ad $S(k)$. Si vede subito ch'essa può ottenersi come prodotto di trasformazioni dei seguenti tipi:

1° T_1:

$$\begin{cases} \xi^p = \sum_{q=1}^{n} a_{pq} x^q : \left(1 + \sum_{q=1}^{n} a_q x^q\right) \\ \xi^\alpha = x^\alpha : \left(1 + \sum_{q=1}^{n} a_q x^q\right) \end{cases} \qquad \alpha = m+1, \dots, n. \tag{14}$$

2° T_{r+1} $(r = 1, 2, \dots, k-1)$:

$$\begin{cases} \xi^p = x^p : \left(1 + \sum_{q=1}^{n} a_q x^q\right) & p = 1, \dots, m \\ \xi^D = x^D : \left(1 + \sum_{q=1}^{n} a_q x^q\right) & D = d_1 + 1, \dots, d_r \\ \xi^E = \sum_{s=d_r+1}^{n} a_{Es} x^s : \left(1 + \sum_{q=1}^{n} a_q x^q\right) & E = d_r + 1, \dots, d_{r+1} \\ \xi^F = x^F : \left(1 + \sum_{q=1}^{n} a_q x^q\right) & F = d_{r+1} + 1, \dots, n. \end{cases} \tag{15}$$

3° T_{k+1}:

$$\begin{cases} \xi^D = x^D : \left(1 + \sum_{q=1}^{n} a_q x^q\right) & D = 1, 2, \dots, d_k \\ \xi^E = \sum_{s=d_k+1}^{n} a_{Es} x^s : \left(1 + \sum_{q=1}^{n} a_q x^q\right) & E = d_k + 1, \dots, n. \end{cases} \tag{16}$$

È facile verificare l'invarianza degli I_r per le trasformazioni di ciascuno dei tre tipi.

Nel caso $m = 1$ i detti invarianti hanno significati geometrici semplici dati da B. SEGRE e da me; rimane aperto il problema di trovare il significato delle I_r per $m > 1$.