
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni.

- * B. Segre, "The non-singular cubic surfaces". A New Method of Investigation. With Special Reference to Questions of Reality, University Press, Oxford, 1942 (Mario Villa)
- * A. Ghizzetti, Calcolo Simbolico, Monografie di matematica applicata, Zanichelli, Bologna, 1943 (Luigi Amerio)
- * Legendre Polynomials, Mathematical Tables, Part-Volume A, University Press, Cambridge, 1946 (E. Aparo)
- * Flechter A., Miller J.C.P., Rosenhead L., An Index of Mathematical Tables, Scientific Computing Service Lim., London, 1946 (Enzo Aparo)
- * The Airy Integral, Mathematical Tables, Part-Volume B, University Press, Cambridge, 1946 (E. Aparo)
- * F. Tricomi, Funzioni Analitiche, II Edizione, Zanichelli, Bologna, 1946 (Mario Villa)
- * Galileo Galilei, Dialogo dei massimi sistemi, II-III giornata, Sandron, Roma, 1946
- * A. Duschek, A. Hochrainer, Grundzüge der Tensorrechnung un analytischer Dartellung, I^o Teil: Tensoralgebra, Springer, Wien, 1946
- * M. Picone, Teoria Moderna dell'Integrazione delle Funzioni, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1945-46 (Giovanni Sansone)
- * Giovanni Sansone, Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa, vol. 1 e vol. 2, Cedam, Padova, 1947 (Aldo Ghizzetti)
- * M. Picone, Fondamenti di analisi funzionale lineare, Libreria dell'Università di Roma, 1943 (Carlo Miranda)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 2
(1947), n.1, p. 57-70.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_1_57_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

RECENSIONI

B. SEGRE. « *The non-singular cubic surfaces* ». *A New Method of Investigation With Special Reference to Questions of Reality*. Oxford, University Press, 1942, pagg. XI + 180.

Il lavoro, di cui noi veniamo a conoscenza soltanto ora, è stato scritto dal Segre in Inghilterra, negli anni dell'esilio.

L'A. ha dato alla letteratura matematica un'opera non soltanto utile in quanto era ormai tempo di raccogliere in un trattato i risultati ben noti sulle superficie cubiche, ma spiccatamente originale per il metodo di ricerca adottato e per i nuovi contributi apportati.

Esso permette all'A. di riesaminare tutta la teoria delle superficie cubiche non singolari in modo suggestivo, di semplificarla e di completarla in alcuni punti essenziali. Il metodo consiste nel considerare la superficie cubica F come avente per limite la superficie F_0 decomposta in tre piani indipendenti π_1, π_2, π_3 , supponendo che le rette $p_1 \equiv (\pi_2, \pi_3)$, $p_2 \equiv (\pi_1, \pi_3)$, $p_3 \equiv (\pi_1, \pi_2)$ intersechino F in terne di punti aventi ben determinati limiti $P_{11}, P_{12}, P_{13}; P_{21}, P_{22}, P_{23}; P_{31}, P_{32}, P_{33}$. I nove punti $P_{\alpha\beta}$ e il punto $O \equiv (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ essendo distinti. Le rette limiti delle 27 rette di F sono allora le 27 rette $P_{\alpha\beta}P_{\alpha\gamma} (\alpha_1 \neq \alpha_2)$ di cui 9 su π_1 , 9 su π_2 e 9 su π_3 .

Si perviene così ad una nuova notazione per le 27 rette di F denotando la retta corrispondente a $P_{\alpha\beta}P_{\alpha\gamma}$ con un simbolo abc formato da tre numeri, uno dei quali è zero, mentre gli altri due sono uguali a β e γ ed hanno rispettivamente l' α_1 esimo e l' α_2 esimo posto.

Una suggestiva rappresentazione grafica delle 27 rette si ottiene associando a ciascuna retta di F la proiezione su un piano da un punto (non appartenente a F_0) della corrispondente retta $P_{\alpha\beta}P_{\alpha\gamma}$.

È da notare che l'A. ha approfondito il metodo considerato in guisa di trarne non soltanto proprietà numerative ma proprietà geometriche, di struttura.

Dalla rappresentazione grafica, si ottiene nel I capitolo un quadro completo delle proprietà più importanti delle 27 rette, dei 45 piani tritangenti, delle bisestuple, ecc., considerate nel campo complesso.

Nel capitolo II queste proprietà vengono completate in relazione al gruppo delle 27 rette che viene qui profondamente studiato per la prima volta.

Il capitolo III è il più ampio e caratteristico del volume ed è interamente dedicato al campo reale.

In esso si mostra, con semplici considerazioni di continuità, che le superficie cubiche reali sono divise in 5 sistemi continui connessi, riottenendo così i cinque tipi della classificazione di Schläfli.

Per ciascun tipo sono esaminate col metodo della rappresentazione grafica molte proprietà della configurazione formata dalle 27 rette; in particolare si effettua la classificazione e la costruzione delle bisestuple (reali) dei differenti tipi. Strettamente legato a tutto ciò è lo studio, essenzialmente di carattere topologico, del poliedro generalizzato determinato su una superficie cubica reale dalle sue rette reali, che conduce ad una chiara conoscenza della forma di ciascuna superficie e delle loro superficie duali, a varie proprietà delle loro curve paraboliche e alla loro classificazione nello spazio affine.

Il IV ed ultimo capitolo è di natura diversa dai precedenti; esso è prevalentemente analitico. Qui, dopo aver dimostrato il teorema di SYLVESTER, vengono determinate le superficie cubiche non singolari per le quali o non è unica, o non è possibile la riduzione alla forma canonica di SYLVESTER; in tali casi si danno le relative forme canoniche. Segue poi la determinazione di tutte le superficie cubiche (non singolari o singolari) le cui Hessiane sono riducibili, e una dimostrazione della proprietà che ogni forma cubica quaternaria può essere espressa come somma di sette cubi al più. Come applicazione dell'equazione canonica si studiano e si classificano completamente, sia nel campo complesso che in quello reale, le superficie cubiche non singolari che ammettono trasformazioni omografiche in sé.

Infine si indica come, nel campo reale, il tipo di una superficie cubica non singolare possa dedursi dalla sua equazione canonica. Ulteriori applicazioni del metodo di degenerazione allo studio delle superficie cubiche dell' S_3 (considerando la superficie come avente per limite la superficie decomposta in una quadrica e in un piano) e delle ipersuperficie cubiche dell' S_4 sono indicate brevemente in due delle tre appendici con cui termina il volume.

Il libro in bella veste tipografica è corredato da 63 figure.

Quest'opera è stata il punto di partenza di ricerche del SEGRE di carattere aritmetico sulle superficie cubiche apparse in periodici inglesi (specialmente nel *Journal London Math. Soc.*).

Mario Villa

A. GHIZZETTI, *Calcolo simbolico*. Monografie di matematica applicata, per cura del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Zanichelli, Bologna, 1943.

Con questo libro il Ghizzetti ha dato alla nostra letteratura di matematica e di ingegneria la prima trattazione del *Calcolo simbolico degli elettrotecnici* nell'indirizzo fondato sull'uso della trasformata di Laplace, riuscendo a conciliare, in modo veramente felice, le esigenze del rigore scientifico con quelle delle semplicità e perspicuità dell'esposizione.

Il libro, preceduto da una prefazione di M. Picone, si compone di quattro parti e di due appendici.

Parte prima. — Nei §§ 1, 2, 3 sono esposte in modo elementare le proprietà più salienti della trasformata di Laplace, in particolare quelle relative

all'operazione di derivazione della funzione trasformanda e alla trasformata del prodotto integrale di due funzioni.

Nel § 4 è considerato il problema dell'antitrasformazione di Laplace sia nel caso in cui la trasformata sia olomorfa e nulla all'infinito (formula di Pincherle) sia nel caso generale (formula di Riemann). Si dimostra poi il teorema di unicità di Lerch e sono enunciati il classico expansion-theorem di Heaviside, la formula di Phragmén, i metodi di inversione di Tricomi e di Picone, basati sull'uso dei polinomi di Laguerre e di Legendre rispettivamente. Diffusamente è trattato il caso elementare dell'antitrasformazione delle funzioni razionali proprie.

Nel § 5 è esposta in forma rigorosa la teoria delle funzioni impulsive e delle loro trasformate.

I §§ 6, 7 sono dedicati all'integrazione, col metodo della trasformata di Laplace, delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti e dei sistemi di tali equazioni. Notevole e originale l'approfondita discussione dei sistemi non normali, avente per fine lo studio esauriente della teoria dei circuiti elettrici a costanti concentrate.

Per tali sistemi i valori iniziali non sono, in generale, del tutto arbitrari; si dimostra però che posti, sia pure ad arbitrio, i dati iniziali, il metodo della trasformata di Laplace conduce in ogni caso a una soluzione la quale dà luogo a valori iniziali intesi come $(\lim_{t \rightarrow 0+})$ diversi, in generale, dalle quantità assegnate ma dotati di un notevole significato fisico, che sarà posto in luce nella parte seconda.

Nei §§ 8, 9 si espongono le più notevoli proprietà delle funzioni di Bessel e delle funzioni theta e se ne ricavano le trasformate.

Parte seconda. — È dedicata allo studio dei circuiti elettrici a costanti concentrate. Dopo una accurata analisi della struttura dei sistemi di equazioni di Kirchhoff si passa all'integrazione di questi col metodo esposto nella parte prima.

L'Autore distingue tra *dati iniziali* ($\lim_{t \rightarrow 0-}$) e *valori iniziali* ($\lim_{t \rightarrow 0+}$) generalmente incogniti perchè all'istante $t = 0$ possono presentarsi delle discontinuità nelle soluzioni. In base a considerazioni fisiche il Ghizzetti valuta, a priori, queste discontinuità e dimostra che, se ci si vale, per l'integrazione dei sistemi in esame, del metodo della trasformata di Laplace assumendo come valori iniziali i dati iniziali, la soluzione cui il metodo conduce ha proprio come valori iniziali i numeri ottenuti aggiungendo ai dati iniziali i salti relativi alle predette discontinuità.

La teoria è illustrata con interessanti esempi nei quali si fa uso, per il calcolo delle correnti, delle funzioni impulsive.

La trattazione precedente, svolta nel § 1, consente, nel § 2, una rigorosa applicazione del metodo simbolico in tutti i casi (e non solo per i circuiti inizialmente a riposo).

Nel § 3 si studia il caso particolare delle f.e.m. esponenziali, si ricava la relativa formula di Heaviside e si collega il *Calcolo simbolico* con l'ordinario *Calcolo di Steinmetz* per il regime alternativo.

Seguono numerosi ed interessanti esempi.

Parte terza. — È dedicata alla teoria dei circuiti a costanti distribuite. Nei §§ 1 e 2 si ricavano le classiche equazioni di propagazione in una di-

mentione e le equazioni corrispondenti nelle trasformate, con vari tipi di condizioni ai limiti; si espone inoltre una accurata analisi del fenomeno di propagazione, particolarmente in relazione alle riflessioni delle grandezze elettriche alle estremità di una linea.

Nel § 3 si studiano i cavi di lunghezza infinita o finita, con l'ausilio della funzione degli errori e delle funzioni theta.

Nel § 4 sono trattate le linee antidistorcenti di Heaviside (in particolare le linee senza perdite).

Il § 5 è dedicato all'esame del caso generale, esprimendo la soluzione mediante le funzioni di Bessel.

Parte quarta. — Tratta dei *filtri elettrici* e delle *linee artificiali*. Nel § 1 l'Autore considera le catene, finite o infinite, di trasduttori quadripolari, ricavando le equazioni di propagazione.

Nel § 2 è studiato, come catena infinita, il filtro passa-basso, nel quale la soluzione è data mediante le funzioni di Bessel, e, per la catena finita, sono esaminati vari casi, ottenendosi un gruppo di formule assai generali.

Nel § 3 vengono trattati alcuni tipi di linee artificiali.

Il trattato si chiude con due *Appendici*. La prima contiene una estesa e utilissima raccolta di trasformate di Laplace (153 trasformate) per ciascuna delle quali è anche brevemente accennata la dimostrazione. La seconda è dedicata a una rapida esposizione concernente la trasformata di Laplace bilatera, la trasformata di Fourier, di Laplace-Stieltjes con un cenno alle funzioni caratteristiche delle leggi di probabilità, e infine la trasformata multipla di Laplace.

Luigi Amerio

Legendre Polynomials. British Association for the Advancement of Science, Mathematical Tables, Part-Volume A. Prepared by the Committee for the Calculation of Mathematical Tables. Cambridge, University Press, 1946. 8s., 6d.

Tavole dei polinomi di Legendre

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} x^{n-4} + \dots \right]$$

calcolati con 7-8 cifre significative o decimali per $2 \leq n \leq 12$, $0 \leq x \leq 6$ col passo di 0,01, e per $2 \leq n \leq 6$, $6 \leq x \leq 11$, col passo di 0,1. Vengono forniti i valori delle differenze centrali seconde e quarte, quando queste ultime occorrono.

E. Aparo

FLETCHER A., MILLER J. C. P., ROSENHEAD L. « *An Index of Mathematical Tables* ». Scientific Computing Service Lim., London (1946), pag. VIII-450, 75s.

Lo sviluppo, sempre più vasto, dell'Analisi e del Calcolo Numerico nelle loro applicazioni alle scienze e alla tecnica rendono necessario un uso più frequente di molte funzioni che senza essere « elementari » nel senso

ben noto della parola, lo divengono in pratica tanto più, quanto più dettagliate sono le tabelle numeriche che di esse si costruiscono.

L'«Indice di Tavole Matematiche» di cui ci occupiamo costituisce una guida comoda e sicura per la loro conoscenza e la loro diffusione, indicando:

1) il numero delle cifre significative o decimali con cui una certa funzione è stata calcolata;

2) gli intervalli entro cui variano gli argomenti e le differenze tra i valori di entrata nelle tavole (passo);

3) l'eventuale aggiunta di tabelle ausiliarie aventi lo scopo di facilitare l'interpolazione (differenze successive, parti proporzionali, ecc.);

4a) i nomi degli autori e l'anno di pubblicazione delle tavole;

4b) le riviste o i libri su cui queste sono comparse.

Le informazioni su indicate, eccettuate quelle relative a 4b), occupano, per ogni tavola, generalmente una sola riga: troviamo, per esempio, in un paragrafo dedicato alle funzioni di Bessel $J_n(x)$ e $J_n'(x)$, le notazioni:

10 dec. 0(.001) 16 (01) 25 δ^2 B.A. 6 1937 (2);

ciò significa che di tali funzioni esiste una tavola a 10 decimali, col passo di 0,001 per x compreso tra 0 e 16 e di 0,01 per x compreso fra 16 e 25, contenente le differenze seconde cosiddette centrali. Per quanto si riferisce alle rimanenti indicazioni bibliografiche, basta cercare nella parte II dell'«Indice» sotto la voce B.A., trovando così che la tavola è stata pubblicata nel vol. 6, 1937 delle Tavole Matematiche della «British Association», a pag. 2.

Brevi introduzioni, che precedono i vari paragrafi, ciascuno dedicato a una stessa funzione o a un gruppo di funzioni strettamente collegate fra loro, danno per lo più ragguagli intorno agli errori contenuti in alcune tavole, alle diversità delle notazioni impiegate dai vari autori, e alla convenienza di usare certe tavole piuttosto che altre. È bene anzi notare a tale proposito il criterio costantemente seguito di porre al primo posto, in uno stesso paragrafo, le tavole più accurate e calcolate con un maggior numero di cifre significative o decimali.

E Enzo Aparo

The Airy Integral. British Association for the Advancement of Science, Mathematical Tables, Part-Volume B. Prepared by J. C. P. Miller. Cambridge, University Press, 1946. 10s.

Si pone:

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right) dt$$

$$Bi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{1}{3}t^3 + xt\right) + \sin\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right) \right\} dt$$

Sette tavole numeriche, in cui è suddiviso il volume di cui ci occupiamo, forniscono:

1) $Ai(x)$, $Ai'(x)$, per $-20 \leq x \leq 2$, con 8 dec., passo 0,01;

- 2) $\text{Log}_{10} Ai(x); \frac{Ai'(x)}{Ai(x)}$, per $0 \leq x \leq 25$, 8 dec.; 7 dec.; passo 0,1;
per $25 \leq x \leq 75$, 8 dec.; 7 dec.; passo 1.
- 5) Zeri e estremi relativi di $Ai(x)$ e $Ai'(x)$; 8 dec.; 50 valori.
- 4) $Bi(x)$ e « derivate ridotte » (sino all'8°)
per $-10 \leq x \leq 2,5$, 8-10 dec.; passo 0,1.
- 5) Zeri e estremi relativi di $Bi(x)$ e $Bi'(x)$; 8 dec., 20 valori.
- 6) $\text{Log}_{10} Bi(x); \frac{Bi'(x)}{Bi(x)}$ per $0 \leq x \leq 10$, 8 dec.; 7 dec., passo 0,1.
- 7) Funzioni ausiliarie, di cui per brevità non riportiamo le definizioni.

L'interpolazione è facilitata dall'aggiunta delle differenze seconde centrali, « modificate » (v. Comrie, *Interpolation and Allied Tables*, 1936, London), quando l'uso di esse è lecito.

Enzo Aparo

F. TRICOMI. *Funzioni analitiche*, « Monografie di Matematica applicata per cura del Consiglio Nazionale delle Ricerche ». Zanichelli, Bologna, II edizione, 1946, pp. VIII + 134.

La nuova edizione differisce per pochissime aggiunte dalla prima (questo Bollettino, Ser. I, Vol. XVI, 1938, pag. 127). L'A., come scrive egli stesso, si è preoccupato di non snaturare, con nuove aggiunte, il carattere di quest'opera che ha raccolti così larghi consensi.

Mario Villa

GALILEO GALILEI. *Dialogo dei massimi sistemi*. II-III giornata, p. 499, Sandron, Roma, 1946.

Questo volume è il primo di una « Collana di Classici delle scienze fisiche matematiche e naturali » diretta da G. Castelnuovo ed F. Enriques.

Come dicono i due Direttori, è importante per l'avvenire della cultura — e non solo italiana — che i giovani siano invitati alla lettura delle pagine eterne che i fondatori della scienza ci hanno tramandato e alla meditazione delle loro grandi opere.

Che la collezione s'inizii con uno dei Dialoghi dell'astro maggiore del pensiero scientifico italiano è ben naturale: l'altro Dialogo formerà il secondo volume della prima serie, in cui compariranno anche le *Disquisitiones generales circa superficies curvas* di Gauss e gli scritti più importanti di Avogadro e di Cannizzaro.

Nel Dialogo dei massimi sistemi sono brevissimamente riassunte la prima e l'ultima giornata; mentre sono pubblicate (quasi per intero) la seconda e la terza cui è principalmente affidata la gloria di Galileo come fondatore della Dinamica.

Ciò che dà particolarmente valore a questa ristampa del Dialogo è la Prefazione, in cui F. Enriques chiarisce e precisa la posizione filosofica di Galileo e il valore del suo sforzo per la comprensione del mondo: l'Enriques mostra, in pagine brillanti che restano una delle sue ultime fatiche, che dal-

l'esigenza di provare la validità del sistema copernicano scaturiscono sia le leggi della dinamica sia il principio d'inerzia e quello di relatività; ed osserva che Newton, cui è stato dato di sintetizzare in una teoria conclusiva le acquisizioni dei suoi predecessori, si è trovato, per ciò che concerne il sistema geocentrico, di fronte ad una questione già giudicata: Galileo invece è nel centro della battaglia.

I sobrii dati biografici e le brevi note aggiungono pregio al volume che anche dal punto di vista dell'estetica tipografica nulla lascia a desiderare.

A. DUSCHEK, A. HOCHRAINER. *Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung. I^o Teil: Tensoralgebra*. (Esposizione analitica dei fondamenti del calcolo tensoriale. Parte I: Algebra tensoriale). Edit. Springer, Wien, 1946, p. 129.

È questo il primo volumetto di un'opera in tre parti sul calcolo tensoriale: esso riguarda l'algebra tensoriale; gli altri due saranno dedicati all'analisi tensoriale e alle sue applicazioni alla fisica. Le considerazioni degli AA. sul valore relativo del calcolo vettoriale e del calcolo tensoriale, e sulla molto maggiore capacità di questo, ci trovano pienamente concordi: anche se del calcolo tensoriale si limita l'uso, come qui vien fatto, allo spazio euclideo a tre dimensioni. Il contenuto volutamente elementare di questo libretto, destinato ai tecnici e nato dalla collaborazione con essi, non toglie nulla al suo interesse.

M. PICONE. *Teoria Moderna dell'Integrazione delle Funzioni*. (pp. 1-267). Lezioni d'Analisi tenute nell'anno accademico 1945-46, raccolte dal Dott. F. Mammana. Scuola Normale Superiore di Pisa. Quaderni Matematici, 1. (Libreria Goliardica, Pisa, Lire 360 a totale beneficio della Sc. Normale Superiore).

T. J. STIELTJES ⁽¹⁾, nel 1894, in una sua celebre memoria sulle frazioni continue, per esprimere i limiti delle ridotte di ordine pari e di quelle di ordine dispari della frazione, generalizzava l'integrale, di (MENGOLI-CAUCHY) RIEMANN, con l'introduzione di un nuovo integrale, chiamato successivamente *integrale di RIEMANN-STIELTJES*.

STIELTJES osserva che il suo integrale poteva servire per la determinazione dell'espressione del momento di una distribuzione rettilinea e discontinua di masse rispetto ad un polo ⁽²⁾, e successivamente l'integrale di STIELTJES riceveva svariate applicazioni in vari campi dell'Analisi (espressione di aree e di volumi di figure piane e solide, del lavoro di una forza lungo la traiettoria descritta dal suo punto di applicazione) e delle Matematiche applicate ⁽³⁾, ed il RIESZ ne faceva una notevole applicazione nella

⁽¹⁾ T. J. STIELTJES: *Recherches sur les fractions continues*, (1894), Oeuvres, II, 402-566.

⁽²⁾ T. J. STIELTJES: op. cit., p. 471.

⁽³⁾ Cfr. ad es. G. SANSONE: *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali* (2^a ed. ne, Bologna, 1945), pp. 430-432.

determinazione della rappresentazione analitica dei funzionali lineari (*).

Il volume del prof. M. PICONE, che riproduce un corso semestrale di lezioni tenute dal chiarissimo Autore nella primavera del 1946 al Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa, mostra preventivamente al lettore come lo studio dei problemi della filosofia naturale, nei quali entrino in giuoco fenomeni impulsivi, porti allo studio dei limiti di certe somme i quali si rappresentano appunto con integrali di RIEMANN-STIELTJES.

Il Cap. I è dedicato allo studio delle funzioni additive di uno spazio euclideo S_r , a quelle a variazione finita, *funzioni determinanti*, alla loro decomposizione canonica secondo JORDAN, e all'analisi dei loro punti di discontinuità (in numero finito, o un'infinità numerabile).

Qui, e in tutti i Capitoli successivi, l'A. ricorre sistematicamente al suo preferito procedimento di limite rispetto ad una o più variabili ordinate, anche in un ordinamento transfinito ⁽⁵⁾, che gli consente una notevole agilità in tutta la sua trattazione.

Nel Cap. II il lettore è condotto alla definizione di minimo, di massimo, e di integrale di RIEMANN-STIELTJES.

$$\int_I f(P) d\alpha(P)$$

di una funzione $f(P)$ del punto P di un insieme I , reale e limitata, rispetto alla funzione determinante $\alpha(P)$, e in modo particolarmente semplice vien data la dimostrazione che le funzioni uniformemente continue in un insieme chiuso e limitato sono integrabili, proposizione questa che rappresenta un punto essenziale della trattazione del Nostro, perchè in essa è il collegamento tra l'integrale di RIEMANN-STIELTJES e quello di LEBESGUE-STIELTJES (cfr. p. 40).

Il ricordato procedimento di passaggio al limite, e l'integrazione delle funzioni continue in un insieme chiuso sono i due pilastri per definire nel Cap. III, l'assoluta integrabilità di una funzione $f(P)$ arbitraria in un insieme rispetto ad una funzione determinante, e provare così che ogni insieme limitato ha misura finita (cfr. p. 61), e che ogni funzione limitata, definita in un insieme di misura finita è ivi sommabile (cfr. p. 63).

Nel Cap. IV si mostra rapidamente come la consueta trattazione della teoria della misura degli insiemi secondo LEBESGUE ⁽⁶⁾ possa trasportarsi senz'altro alla misura degli insiemi rispetto ad una qualsiasi funzione determinante; nel Cap. V è considerata la convergenza puntuale, e in misura, delle funzioni quasi continue secondo TONELLI (misurabili secondo LEBESGUE) e sono dati al lettore il teorema di SEVERINI-EGOROFF sulle successioni di funzioni quasi continue convergenti, e il così detto teorema di

(*) Cfr. E. RIESZ: *Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionnelles linéaires*; Ann. Sc. Éc. Norm. Sup., (2) 31 (1914), 9-14.

(5) Cfr. M. PICONE: *Lezioni di Analisi Infinitesimale*, Vol. I (Catania, 1923), 1-30.

(6) Cfr. ad es. CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN: *Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensemble, Classes de Baire* (Paris, 1916).

CAUCHY che esprime la condizione necessaria e sufficiente per la convergenza in misura.

Nel Cap. VI si prova l'integrabilità delle funzioni quasi continue e limitate in insiemi limitati, e sono esposte molto dettagliatamente le ordinarie proprietà additività distributività, assoluta continuità, delle funzioni quasi continue e sommabili in un insieme limitato o no.

Altro Capitolo importante per lo studioso è il VII, nel quale vengono stabiliti i teoremi di B. LEVI, G. VITALI, H. LEBESGUE di passaggio al limite sotto il segno integrale, ed altri ancora; sono esposti in modo particolarmente semplice due teoremi di CARATHÉODORY i quali forniscono delle relazioni tra i limiti degli integrali di una successione di funzioni sommabili e gli integrali del minimo e del massimo limite della successione stessa, ed è data un'esauriente descrizione delle proprietà dello spazio Hilbertiano, rispetto al più generale riferimento, idonea a fornire, a chi debba dedicarsi all'Analisi funzionale, un espressivo modello di spazio metrico completo. Assai interessante il teorema finale del Cap. (p. 210) sulla condizione necessaria e sufficiente per la completezza di una successione di funzioni quasi continue e di quadrato sommabile rispetto ad una funzione determinante positiva, prescindendo dall'ipotesi contenuta in tutti i criteri finora noti, che la successione sia ortogonale e normale.

Il Cap. VIII tratta diffusamente delle formule di riduzione degli integrali: vengono stabiliti per gli integrali di LEBESGUE-STIELTJES i teoremi che si connettono al teorema di FUBINI e a quello di TONELLI della riduzione di un integrale doppio a uno doppio iterato, e si applicano i risultati per dimostrare la completezza di particolari sistemi ortogonali. Nel Cap. IX infine sono definite le funzioni determinanti di punto come le funzioni di un S_n a variazione finita, e vien ricondotta l'integrazione rispetto ad una funzione determinante di punto a quella rispetto ad una funzione determinante di intervallo.

Chiude il Cap. lo studio delle funzioni di punto a variazione finita secondo VITALI, e la loro rappresentazione canonica.

Questa la trama del corso; il nostro eminente analista nel redigerlo si è prefisso di condurre il lettore organicamente, in modo unitario, e per la via diretta, al possesso dei concetti e delle proprietà più espressive inerenti all'integrazione, ed è completamente riuscito nel suo scopo. Il volume avrà certamente successo, e la prossima edizione a stampa ne faciliterà in Italia e all'Estero la meritata diffusione.

Giovanni Sansone

GIOVANNI SANSONE. *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa*. Vol. I (359 pag.) e vol. II (564 pag.). (Padova, Cedam, Casa Editrice Dott. A. Milani, 1947).

Con quest'opera il Prof. Giovanni Sansone, confermando ancora una volta le sue eccezionali doti di insigne trattatista, ha dato alla letteratura matematica italiana un nuovo preziosissimo dono. La varietà e vastità degli argomenti trattati, la chiarezza dell'esposizione, la ricchezza di esempi e di applicazioni impongono queste «Lezioni» all'attenzione degli studiosi ai quali è, forse per la prima volta, offerta la comodità di trovare raccolta in un unico libro una così ampia collezione di teorie matematiche. Ma il lettore

può spingere il suo sguardo ben oltre i limiti, già pur così vasti, dell'opera, qualora tenga conto delle accuratissime citazioni storiche e bibliografiche di cui essa è corredata.

Passeremo ora brevemente in rassegna il contenuto dei due volumi, ciascuno dei quali consta di sei capitoli.

Nel Cap. I sono esposte le definizioni e le prime proprietà relative alle funzioni olomorfe (nell'indirizzo di Cauchy-Riemann), la teoria delle serie di potenze (con i teoremi di Abel e di Tauber) ed infine uno studio delle funzioni elementari.

Nel Cap. II, posto il concetto di integrale curvilineo di una funzione complessa, in particolare olomorfa, viene stabilito il teorema integrale di Cauchy (anche nelle condizioni più ampie di Goursat) e se ne sviluppano le conseguenze (funzione primitiva, formula integrale di Cauchy, teorema di Morera, sviluppo di Cauchy-Taylor, teorema di Cauchy-Liouville, sviluppo di Laurent, ecc.). Di particolare interesse sono alcuni complementi, contenuti nei nn. 16, 19, riguardanti un'estensione del teorema di Cauchy-Liouville, ottenuta con la considerazione della funzione $A(r) = \max R[f(z)]$, $|z - a| = r$, e l'espressione di una funzione olomorfa mediante la sua parte reale. A ciò segue l'esposizione della teoria delle funzioni analitiche secondo Weierstrass con i vari concetti e proprietà che ne derivano (campo di esistenza di una funzione analitica, condizioni di monodromia, punti singolari, spazi lacunari, serie di funzioni analitiche, ecc.). Vogliamo in particolare notare i nn. 26-27 sulla questione dell'esistenza di punti singolari sulla circonferenza di convergenza di una serie di potenze, col teorema di Vivanti-Pringsheim; il n. 30 ove si parla delle serie di Lambert; i nn. 31, 32 in cui si arriva ad un teorema di Vitali relativo alla convergenza uniforme di una serie di funzioni analitiche.

Il Cap. III è essenzialmente dedicato allo studio delle singolarità isolate delle funzioni analitiche. Dopo la classificazione di tali singolarità, vi è un primo studio sul comportamento di una funzione analitica nell'intorno di un punto singolare essenziale isolato (teoremi di Casorati e Weierstrass); il classico teorema di Picard viene qui soltanto enunciato (la dimostrazione sarà poi data al Cap. V e si ritornerà sull'argomento al Cap. X). Viene successivamente svolta la teoria dei residui integrali, dell'indicatore logaritmico, dell'inversione di una funzione analitica nell'intorno di un punto regolare, ecc. Molto interessanti sono i teoremi di Ronché, di Hurwitz, di Mac Donald, di Jensen esposti ai nn. 12, 13, 14, 15 e relativi all'esistenza ed alle proprietà degli zeri di una funzione analitica. Il Cap. termina con una notevole raccolta di esempi di calcolo di integrali per mezzo di residui; ci piace segnalare il primo di essi (dovuto a Stieltjes) che mette in evidenza la non chiusura del sistema $1, x, x^2, \dots$ in un intervallo infinito.

Il Cap. IX tratta anzitutto del problema della fattorizzazione delle trascendenti intere; sono esposte le classiche ricerche di Weierstrass, dalle quali deriva il concetto di rango di una funzione intera. La teoria è illustrata con esempi e, al n. 5, con un esteso studio della funzione euleriana $\Gamma(z)$. Successivamente vengono considerate le funzioni uniformi con un numero finito di singolarità, le funzioni meromorfe, e si arriva al metodo di Cauchy per lo sviluppo in serie di una funzione uniforme con una data successione di punti singolari isolati; notevoli le applicazioni fatte ai nn. 9, 10. L'ultima

parte del Cap. è dedicata al teorema di Mittag-Leffler ed ai suoi rapporti con la fattorizzazione di Weierstrass.

Di grande interesse è il Cap. V contenente un approfondito studio delle trascendenti intere. Qui è assai difficile riferire in breve sulle numerose questioni trattate (trascendenti intere di ordine finito, esponente di convergenza, rango e genere di una funzione intera, limitazioni e proprietà relative ai predetti caratteri di una trascendente intera, ecc.). Ci limiteremo a dire che la trattazione culmina con i classici teoremi di Schottky (n. 16), di Landau (n. 17) ed infine con il primo ed il secondo teorema di Picard (nn. 18, 19), ricollegandosi così ad un argomento già iniziato nel Cap. III.

Degno di nota è il Cap. VI ove sono studiati alcuni tipi di serie e sono esposte alcune nozioni fondamentali, di grande utilità nelle applicazioni. Dopo una premessa sui numeri e sui polinomi di Bernoulli, sono ricavate le serie di Eulero-Mac Laurin, di Lagrangia (della quale si mostra un'applicazione all'equazione di Keplero) e di Teixeira, conseguendo così larghe estensioni dei classici sviluppi di Cauchy-Taylor e di Laurent. Dopo ciò, prendendo lo spunto dalla serie di Stirling relativa alla funzione $\log \Gamma(z)$, viene svolta la teoria delle serie asintotiche di Stieltjes e Poincaré ed, al n. 10, si espone il cosiddetto metodo del colle per ricavare formule asintotiche. Ultimo argomento del Cap. è la teoria della sommabilità delle serie divergenti, secondo Borel.

Il secondo volume si inizia col Cap. VII dedicato allo studio di alcune $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, stabilendo le loro proprietà in relazione al semipiano di convergenza e dando, teoremi vari che permettono di esprimere i coefficienti a_n mediante la $f(s)$, assieme a numerose altre interessanti formule. Come caso particolare ($a_n = 1$) delle predette serie si ottiene la funzione $\zeta(s)$ di Riemann che viene accuratamente studiata attraverso le sue rappresentazioni integrali. Segue l'esposizione delle principali proprietà della funzione ipergeometria di Gauss.

Il Cap. VIII tratta della rappresentazione conforme delle aree piane semplicemente connesse, iniziandosi con l'esposizione delle nozioni fondamentali relative a tali rappresentazioni, subito illustrate con molte esempi. Segue la teoria delle trasformazioni lineari di Möbius e, dopo un breve cenno sulle funzioni semplici, viene dimostrato il teorema di Riemann sulla rappresentabilità conforme di una regione semplicemente connessa interna a un circuito regolare sull'interno di un cerchio, con riferimento ai risultati più generali di Carathéodory ed-altri. Il Cap. si chiude con due §§ sulle ricerche di Schwarz circa la questione di rappresentare conformemente un poligono su un semipiano o su un cerchio, e sui problemi di inversione che a tale questione si collegano.

Nel Cap. IX è esposta la teoria delle funzioni armoniche, soprattutto in due variabili. Premesse le proprietà fondamentali di tali funzioni, le formule di Green e loro conseguenze, si pone il problema interno di Dirichlet, mostrando fra l'altro la sua equivalenza ad un problema variazionale, e lo si risolve nel caso del cerchio. Noto il n. 20 con la formula di Poisson-Jensen relativa alle funzioni analitiche con un numero finito di poli all'interno di un cerchio. Sono successivamente trattati numerosi altri argomenti: potenziale logaritmico di superficie e di semplice o doppio strato, metodo di Neumann per la risoluzione del problema di Dirichlet, teorema di Harnack,

problema di Dirichlet generalizzato (con discontinuità di 1^a specie sul contorno), metodo alternato di Schwarz. Si riprende il problema della rappresentazione conforme di un'area piana semplicemente connessa su un cerchio (cfr. Cap. VIII) per esaminare la corrispondenza fra le frontiere dei campi. Termina il Cap. la trattazione del problema di Dini-Neumann e lo studio delle funzioni armoniche in campi illimitati.

Degno di particolare attenzione è il Cap. X che contiene nel § 1 una dettagliata esposizione della metrica iperbolica in due dimensioni. Noteremo, fra l'altro, lo studio delle geodetiche, delle aree non euclidee, dei movimenti di 1^a e 2^a specie, dei triangoli geodetici e la non dimostrabilità del postulato delle parallele. Il § 2 tratta del gruppo modulare e delle sue proprietà. La rappresentazione geometrica di tale gruppo consente di fare, nel successivo § 3, una brillante applicazione ad una questione di teoria dei numeri (analisi indeterminata di 2° grado), dopo aver premesso alcune nozioni sulle forme binarie quadratiche. Nei tre ultimi §§ si considera la rappresentazione conforme dei poligoni a lati circolari su un semipiano (fondandosi sul concetto di derivata schwarziana), si sviluppa la teoria delle funzioni triangolari e del relativo problema di inversione (mettendo in evidenza il legame di tali funzioni con le funzioni ipergeometriche) e infine si espone la dimostrazione originale del primo teorema di Picard per mezzo dell'invariante modulare.

Il successivo Cap. XI è il più ampio dell'opera e contiene la teoria degli integrali e delle funzioni ellittiche. Esso si inizia con una pregevole ed originale introduzione storica (§ 1) che pone in piena luce le origini della teoria ed i suoi successivi sviluppi. Nei §§ 2, 4, 6, 7 sono studiate le funzioni $\sigma(u)$, $\zeta(u)$, $\gamma(u)$ di Weierstrass [in special modo la $\gamma(u)$] che, come è noto, riescono utili nell'esprimere le proprietà generali delle funzioni ellittiche, proprietà che trovansi esposte nei §§ 3, 5. Sono inoltre mostrate le applicazioni della $\gamma(u)$ alla rappresentazione parametrica delle cubiche ellittiche. Da notare nel § 4 la formula di bisezione della $\gamma(u)$, dovuta all'Autore. Nel § 8 si studia l'integrale ellittico di 1^a specie nella forma di Weierstrass. Le funzioni ellittiche di Jacobi e gli integrali ellittici di Legendre costituiscono argomento del § 9, con una ricca raccolta di proprietà e di formule. Sono ancora considerate le funzioni modulari (§ 10) e le serie theta di Jacobi (§ 11).

L'ultimo Cap. è dedicato allo studio delle funzioni fuchsiane (che comprendono le funzioni modulari) e alla loro rappresentazione analitica secondo Poincaré. Prendendo le mosse da questioni già considerate nel Cap. X, si pone il collegamento fra le funzioni fuchsiane ed il problema della rappresentazione conforme, sul semipiano, di un poligono geodetico della metrica non euclidea, arrivando a trovare una classe di gruppi fuchsiani dei quali si studiano i sottogruppi di indice finito e le corrispondenti funzioni fuchsiane. Si perviene così al teorema di Poincaré sul legame algebrico che, in certe condizioni, intercede fra due tali funzioni. Si consegue poi la rappresentazione analitica delle funzioni medesime per mezzo delle serie theta di Poincaré e si arriva al collegamento della teoria con quella delle equazioni differenziali lineari e coefficienti algebrici.

Questo è il contenuto dell'opera; è evidente che un tal libro non può mancare nella biblioteca di un cultore della nostra Scienza.

Per le difficoltà del momento attuale, i due volumi sono apparsi in veste

litografica. Non rimane che formulare l'augurio di veder presto una nuova edizione a stampa, il che contribuirà a far conoscere ed apprezzare questa nuova fatica del Prof. Sansone, anche fuori del nostro Paese.

Aldo Ghizzetti

M. PICONE. *Fondamenti di analisi funzionale lineare*. Corso tenuto nell'Istituto di Alta Matematica (Anno accademico 1941-42). Ed. lit. della Libreria della Università di Roma, 1943.

Questo nuovo volume di M. Picone riuscirà indubbiamente utile a tutti coloro che desiderano iniziarsi allo studio di quella moderna e così feconda branca della matematica che è l'analisi funzionale lineare. Esso ci dà invero, in una forma per quanto è possibile semplice, un'esposizione sistematica di tale teoria e la sua lettura non richiede altre cognizioni che quelle dei primi rudimenti della teoria delle funzioni di variabili reali. Esso per altro riuscirà assai gradito anche agli specialisti di analisi funzionale giacchè riunisce una messe di risultati moderni e assai interessanti dei quali sarebbe molto malagevole e faticoso prender visione attraverso la lettura delle memorie originali. Per questo aspetto l'opera di Picone può riavvicinarsi a quella ben nota del Banach (*Théorie des opérations linéaires*) nei confronti della quale però ha il pregio di un'esposizione più precisa ed accurata e di una maggiore generalità, che si esplica soprattutto nella considerazione di spazi lineari in un corpo algebrico qualsiasi anzichè nel solo corpo reale. Molta cura ha messo poi l'A. nello stabilire i punti di contatto con l'analisi matematica classica, nel mostrare la ricchezza delle possibili applicazioni, nell'indicare le questioni ancora aperte alle indagini degli studiosi.

Per tutte queste sue qualità sarebbe desiderabile che questo volume potesse avere una maggiore diffusione attraverso un'edizione a stampa.

Il volume è diviso in due parti. Nella prima parte, di carattere introduttivo, l'A. svolge la teoria dell'integrale di Stieltjes, secondo un nuovo indirizzo da lui esposto in alcune recenti memorie. Le funzioni additive d'insieme, l'integrale di Riemann Stieltjes, l'integrale di Lebesgue Stieltjes, le funzioni di punto a variazione limitata, la convergenza in misura e in media formano l'oggetto dei cinque capitoli di questa parte.

Ancora di carattere introduttivo è il Cap. I della seconda parte dedicato ai numeri transfiniti e all'analisi delle conseguenze del postulato di Zermelo.

Nei capitoli seguenti vengono successivamente introdotti vari tipi di spazi astratti. In primo luogo (Cap. II, III e IV) gli spazi metrici, per i quali viene svolta ampiamente la relativa teoria degli insiemi. In secondo luogo (Cap. V) gli spazi additivi propri (anche non metrici) che sono quelli nei quali è definita un'operazione di somma di due elementi e gli spazi lineari (Cap. VI) nei quali oltre all'operazione di somma è definita quella di prodotto di un elemento per un numero di un dato corpo numerico. Infine gli spazi lineari propri e gli spazi lineari normali, che sono spazi a un tempo lineari e metrici.

Nel Cap. IX vengono dati svariati esempi di funzioni lineari dei punti di uno spazio lineare normale, nozione questa già introdotta per quanto riguarda i suoi fondamenti nel capitolo precedente. Notevoli in questi capitoli le applicazioni allo studio delle equazioni differenziali lineari, che si

concludono con la considerazione delle cosiddette « funzioni di Green integrali » le quali permettono di rappresentare mediante integrali di Stieltjes, del nuovo tipo introdotto dal Picone, le soluzioni dei problemi al contorno relativi alle equazioni a derivate parziali della fisica matematica. La costruzione effettiva di tali formule risolutive costituisce un nuovo campo di suggestive ricerche.

Gli ultimi due capitoli della Parte II (X e XI) sono dedicati allo studio delle funzioni lineari, dei punti di uno spazio lineare normale, concepite come punti di un nuovo spazio astratto e delle equazioni funzionali lineari, in particolare delle equazioni del tipo Riesz. È qui che la considerazione degli spazi lineari in un corpo numerico qualsiasi consente al Picone una assai maggiore generalità di risultati; in particolare nelle equazioni dipendenti da un parametro gli è possibile considerare per tale parametro valori anche complessi, ciò che finora non era ancora stato fatto. Un ulteriore progresso è stato poi compiuto dal Picone iniziando lo studio delle equazioni lineari in cui figura come parametro un punto di un generico spazio astratto. E anche questo è nuovo campo di ricerche che meriterebbe di essere approfondito.

Carlo Miranda

Libri ricevuti.

M. VILLA — *Lezioni di Geometria*. Vol. I - Geometria analitica con elementi di proiettiva. U.P.E.B., Bologna, 1947.

M. PICONE e C. MIRANDA — *Esercizi di Analisi matematica*. Tumminelli, Roma, 1945.
