Bollettino
Unione Matematica Italiana

Angiolo Procissi

Sopra una questione di teoria dei numeri di Guglielmo Libri, ed una lettera inedita di Agostino Cauchy

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.1, p. 46–51.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_1_46_0>

Sopra una questione di teoria dei numeri di Guglielmo Libri, ed una lettera inedita di Agostino Cauchy

Nota di ANGIOLO PROCISSI (a Firenze)

Sunto - *Si espone un procedimento di G. Libri per la ricerca delle soluzioni intere di una particolare equazione indeterminata, e si riporta il testo di una lettera inedita di A. Cauchy a G. Libri, nella quale è indicato un altro metodo di soluzione.*

1. In una memoria di GUGLIELMO LIBRI (1802-1869) del 1820 [1] è trattato il problema di risolvere in numeri interi x, z, l'equazione:

$$z^n = a_0^n x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n \tag{1}$$

dove $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sono numeri *interi*, ed $a_0 > 0$.

a) La ricerca delle soluzioni della (1) con $z = 0$ si riduce al problema elementare della determinazione delle soluzioni intere (in numero non superiore ad n) della equazione a coefficienti interi

$$a_0^n x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{2}$$

che, come sappiamo dipende da un numero finito di prove. Ci occuperemo allora soltanto del caso $z \neq 0$.

b) Si potrà anche supporre $z > 0$, come è evidente nel caso di n pari, mentre per n dispari, posto

$$x = -x_1, z = -z_1 \tag{3}$$

la (1) diviene:

$$z_1^n = a_0^n x_1^n - a_1 x_1^{n-1} + a_2 x_1^{n-2} - \dots + a_{n-1} x_1 - a_n \tag{4}$$

dove, avendo supposto $z < 0$, è ora $z_1 > 0$. Il problema si riduce quindi a *trovare le soluzioni della* (1) con $z > 0$.

c) Non è restrittivo supporre che, oltre a_0, i coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ siano *tutti interi positivi*, perchè in caso contrario, con la trasformazione additiva

$$x = A + y \tag{5}$$

la (1) diventa:

$$z^n = a_0^n y^n + \left[\binom{n}{1} a_0^n A + a_1\right] y^{n-1} + \left[\binom{n}{2} a_0^n A^2 + \binom{n-1}{1} a_1 A + a_2\right] y^{n-2} + \\ + \dots + [a_0^n A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} A + a_n]; \tag{6}$$

[1] Memoria || di || GUGLIELMO LIBRI || sopra la Teoria dei Numeri. || Firenze || per LEONARDO CIARDETTI, e Figlio || « All'insegna della Fenice » || MDCCCXX. Opuscolo di pp. 24. È il primo lavoro pubblicato da G. LIBRI.

in questa equazione i coefficienti di $y^{n-1}, y^{n-2}, \ldots,$ sono polinomi in A, col primo coefficiente positivo, e quindi si potrà scegliere un valore di $A > 0$, così grande che tutti i coefficienti divengano positivi.

La trasformazione (5) ad ogni valore positivo di y fa corrispondere un valore positivo di x; inversamente, ai valori positivi della x che soddisfano la (1) e sono maggiori di A, corrispondono valori positivi di y, cosicchè, ove si consideri la (6), occorre anche verificare se la (1) ha soluzioni in x tra 0 ed A.

d) Se a_n è potenza n^{ma} di un numero intero, la (1) ammette la soluzione banale $x = 0$, e inversamente. Basterà allora occuparci delle soluzioni intere x, z, della (1) con $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n$ interi positivi, $x \neq 0, z > 0$. Sia dapprima $x > 0, z > 0$. Possiamo porre:

$$z = a_0 x + y, \text{ con } y > 0; \tag{7}$$

con ciò la (1) diviene:

$$\left[\binom{n}{1} a_0^{n-1} y - a_1\right] x^{n-1} + \left[\binom{n}{2} a_0^{n-2} y^2 - a_2\right] x^{n-2} + \ldots + \\ + \left[\binom{n}{n-1} a_0 y^{n-1} - a_{n-1}\right] x + [y^n - a_n] = 0. \tag{8}$$

Indichiamo con y_0 ed y_1 rispettivamente il più piccolo e il più grande numero positivo y per il quale i coefficienti del primo membro della (8) risultano tutti negativi o tutti positivi. I valori di y per i quali la (7) fornisce una soluzione intera della (1) sono compresi tra y_0 ed y_1; la (8), fissato y, ammette per x un numero finito di soluzioni intere, a meno che esistano valori α di y per i quali tutti i coefficienti della (8) si annullano:

$$\binom{n}{1} a_0^{n-1} \alpha - a_1 = \binom{n}{2} a_0^{n-2} \alpha^2 - a_2 = \ldots = \alpha^n - a_n = 0;$$

in quest'ultimo caso il secondo membro della (1) ha la forma

$$(a_0 x + \alpha)^n.$$

e) Se infine si ricercano le soluzioni della (1) con $x < 0, z > 0$, se n è pari il problema si riduce a determinare le soluzioni intere positive, x_1, z, dell'equazione.

$$z^n = a_0^n x_1^n - a_1 x_1^{n-1} + a_2 x_1^{n-2} - \ldots$$

mentre se n è dispari si debbono trovare le soluzioni intere e positive x_1, z, dell'equazione.

$$z^n = -a_0^n x_1^n + a_1 x_1^{n-1} - a_2 x_1^{n-2} + \ldots$$

e in quest'ultima poichè per x_1 positivo sufficientemente grande il secondo membro è negativo, i valori interi positivi leciti per x_1 sono in numero finito. *Rimane così dimostrato il* teorema di G. LIBRI: *L'equazione* (1) *ha un numero finito di soluzioni intere, a meno che essa rappresenti lo sviluppo del binomio* $(a_0x + \alpha)^n$, (con a_0 ed α interi).

2. La dimostrazione del teor. prec. occupa buona parte (pp. 1-6) del 1° cap. della memoria di G. LIBRI già citato. Il giovanissimo Autore inviò l'opuscolo in omaggio ad AGOSTINO CAUCHY (1789-1858) già allora famoso per la sua vasta produzione scientifica, e ne ebbe in risposta la seguente lettera, nella quale vengono indicati altri procedimenti per la ricerca delle soluzioni intere delle equazioni in due variabili, a coefficienti interi.

Ecco il testo della lettera. (2)

Paris, le 3 Février 1821.

« Monsieur, j'ai reçu, il y a peu de jours, et j'ai lu, avec beaucoup d'interêt, le mémoire *sur la théorie des nombres* que vous m'avez fait l'honneur de m'adresser. J'ai surtout remarqué la méthode ingenieuse à l'aide de laquelle vous resolvez en nombres entiers l'équation

$$z^n = a^n x^n + b x^{n-1} + \dots + px + q.$$

Mais en même temps il m'a semblé qu'on pouvait substituer à cette méthode un principe général qui fournit la solution d'une classe assez étendue d'équations indeterminées. La confience que vous avez bien voulu me témoigner fait que je prends la liberté de développer ici ce principe.

Supposons que, deux variables x et z étant liées par une certaine équation

$$f(x, z) = 0 \qquad (1)$$

on pervienne à trouver une fonction u de ces variables, qui, eu égard à la liaison donnée, ne puisse jamais acquérir tant que les varia-

(2) L'originale autografo di questa lettera è conservato nella Biblioteca Moreniana di Firenze (Fondo Palagi - Libri, filza 431, inserto 76, n. 1) insieme con altre tre lettere, pure autografe di A. CAUCHY al LIBRI: queste ultime non offrono però alcun interesse scientifico. La lettera qui riprodotta era finora inedita, poichè GIACOMO CANDIDO (1871-1941) che compì la prima, e finora unica, esplorazione di ciò che rimane in Firenze delle carte del LIBRI (G. CANDIDO, «Il Fondo Palagi - Libri della Biblioteca Moreniana di Firenze»), in atti del 2° Congresso dell'Un. Mat. It., Bologna 4-6 aprile 1940, Roma 1941, pp. 841-885, si limitò a segnalare l'esistenza delle 4 lettere di CAUCHY.

bles demeurent positives, qu'une valeur numérique inférieure à la limite v. Si la fonction u est rationnelle et entière et si en même temps les coefficients qu'elle renferme sont des nombres entiers, cette fonction devra être, pour des valeurs entières et positives des variables, équivalente (au signe près) à l'un des nombres entiers compris entre 0 et v. Si on l'égale successivement à ces différents nombres, on obtiendra des équations nouvelles qui, combinées l'une aprés l'autre avec la proposée, détermineront un ou plusieurs systèmes de valeurs pour les variables x et z. Parmi ces systèmes ceux qui se composeront de valeurs entières et positives, fourniront toutes les solutions en nombres entiers et positifs de l'équation donnée. Concevons par exemple que de l'équation donnée on tire pour la valeur de z, ou de z^2, ou de z^3, etc...., une fonction entière de x, à coefficients rationnels plus une série ordonnée suivant les puissances descendantes et négatives de x. Alors on pourra prendre pour u un multiple de la différence entre z, ou z^2, ou z^3, etc.... et la fonction entière dont nous venons de parler.

Pour plus de clarté je joins ici l'application du principe général à la résolution de quelques équations particulières.

1er *Problème.* – Trouver les valeurs entières et positives de x et de z, propres à vérifier l'èquation

$$z^2 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1. \tag{2}$$

Solution. – Comme on aura (³)

$$z = x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)^{1/2} = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \dots$$

$(a, b, \dots,$ étant des constantes) on pourra prendre pour u un multiple de l'expression (⁴) $\frac{3}{8} + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \dots = z - x^2 - \frac{1}{2}x$ et faire en conseguence

$$u = 2z - 2x^2 - x. \tag{3}$$

(³) Osserviamo che per x intero e positivo ≥ 2 è $0 < \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} < 1$ e può applicarsi alla potenza $\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)^{1/2}$ lo sviluppo in serie binomiale.

(⁴) Siccome il primo membro, per $x \to \infty$ tende a $\frac{3}{8}$ e il secondo membro è intero, od uguale ad una frazione irriducibile con denominatore 2, la equazione proposta non può ammettere che un numero finito di soluzioni intere.

Cela posé, on trouvera que u doit être inférieur à la limite 2. [5] Donc $u = 0$, or $u = 1$. D'ailleurs $u = 0$ donne $x = 0$, $z = 0$, et $u = 1$ donne $x = 3$, $z = 11$. [6] Celles sont les solutions entières et positives de l'équation (2).

2nd *Problème.* - Trouver les solutions entières et positives de l'équation

(4) $$z^4 + 3z = x^4 + 21x.$$

Solution. - On pourra prendre dans cette hypothèse

(5) $$u = z - x. \text{ [7]}$$

Dès lors la valeur de u étant determinée par l'équation

(6) $$(x + u)^4 + 3(x + u) = x^4 + 21x$$

et son maximum par la formule $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ qui se réduit à $4(x + u)^3 + 3 = 4x^3 + 21$, or, ce qui revient à

(7) $$(x + u)^3 - x^3 = \frac{9}{2}$$

on aura toujours [8]

8) $$u < \left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{3}} < 2,$$

et par suite on ne pourra supporter que $u = 0$ ou $u = 1$.

[5] Dalla (2), tenendo conto che $x > 0$, si ha

$$z^2 = \left(x^2 + \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + x + 1 > \left(x^2 + \frac{1}{2}x\right)$$

e quindi ($z > 0$), $2z > 2x^2 + x$), x, onde per la (3), $u > 0$. Moltiplichiamo per 4 ambo i membri della (2), e sostituiamo in essa il valore $2z = u + (2x^2 + x)$ dato dalla (3); abbiamo, ordinando in x:

(*) $$(4u - 3)x^2 + 2(u - 2)x + (u^2 - 4) = 0$$

il cui discriminante $\triangle = -16(u - 2)(u^2 + u - 1)$ ci dá la condizione $u \leq 2$.

[6] Osserviamo che la (*) della nota prec., per $u = 0$, dà $3x^2 + 4x + 4 = 0$ che non ha radici reali; quindi $u = 0$ non dà soluzioni, contrariamente a quanto si afferma nel testo. Per $u = 1$ la (*) dà $x^2 - 2x - 3 = 0$ la cui sola radice intera positiva $x = 3$ dà, per la (2), $z = 11$. Infine, per $u = 2$, la (*) ricordata dà $5x^2 = 0, x = 0$ e perciò $z = 1$.

[7] Si potrà supporre $z \geq x$, e quindi $u \geq 0$.

[8] Dalla (7) si ha: $\left(x^3 + \frac{9}{2}\right)^{1/3} - x < \left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}$; infatti basta provare

$$\left(x^3 + \frac{9}{2}\right)^{1/3} < x + \left(\frac{9}{2}\right)^3;\; x^3 + \frac{9}{2} < x^3 + 3x^2\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3} + 3x\left(\frac{9}{2}\right)^{2/3} + \frac{9}{2}.$$

D'ailleurs $u=0$, (9) donne $x=0, z=0$; et $u=1$ donne $x=1$, $z=2$.

3ème *Problème.* - Trouver les solutions entières et positives de l'équation

$$(z^2-x)(z+x)=5+4x. \tag{9}$$

Solution. - On pourra prendre dans cette hypothèse

$$u=z^2-x \tag{10}$$

et l'on trouvera $u \leq 4$. (10) D'ailleurs $5+4x$ étant impair, u ne peut être pair. Donc $u=1, u=3$. De plus $u=1$ ne fournit pas des solutions entières et positives. (11) Mais $u=3$ donne $x=1$, $z=2$. (12)

La recherche des solutions entières et negatives se ramène à celle des solutions positives, lorsqu'on change les signes des variables. Ajoutez que dans un grand nombre de cas on pourra résoudre des équations indeterminées à plus de deux variables par des principes semblables à celui que nous avons indiqué.

Je finis en vous priant d'agréer l'assurance de ma consideration distinguée ».

AUGUSTIN CAUCHY

Monsieur GUILLAUME LIBRI
chez M. M. Ciardetti et fils
libraires imprimeurs à Florence.

(9) Dalla (6) per $u=0$ si ha: $x^4+3x=x^4+21x$ che ha l'unica radice $x=0$, cui corrisponde per la (4) $z=0$. Per $u=1$, la (6) diviene $(x-1)\cdot(2x^2+5x-2)=0$ che ha l'unica radice intera $x=1$; per tale valore di x la (4) diviene $(z-2)$ $(z^3+2z^2+4z+11)=0$ che ha l'unica radice intera $z=2$.

(10) Ifnatti per $u=z^2-x\,[z^2>x]$ la (9) diviene $uz+ux=5+4x$ che manifestamente è impossibile per $u \geq 5$.

(11) Per $u=1$, la (10) dà $z^2=1+x$, e per la (9), $z=5+3x$; uguagliando questi due valori si ha: $9x^2+29x-24=0$ che non ha radici intere.

(12) Per $u=3, 9z^2=9+9x$, e per la (9), $3z=5+x$ onde si trae l'equazione in x, $x^2+x-2=0$ che ha l'unica radice intera positiva $x=1$ cui corrisponde $z=2$.