Bollettino
Unione Matematica Italiana

Mario Villa

Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.1, p. 3–8.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_1_3_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1947.

SEZIONE SCIENTIFICA

PICCOLE NOTE

Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo.

Nota di MARIO VILLA (a Bologna) (*)

Sunto. - *Si studiano le trasformazioni puntuali fra due piani, in una coppia di punti corrispondenti a Jacobiano nullo, nel caso in cui è possibile l'approssimazione con trasformazioni quadratiche.*

1. Recentemente ho dimostrato che, in una trasformazione puntuale T fra due piani, in una coppia (O,O') a Jacobiano nullo, l'appartenenza dell'E_1 stazionario alla Jacobiana è condizione necessaria e sufficiente perchè la T sia approssimabile, fino all'intorno del 2° ordine di (O,O'), con una trasformazione cremoniana (1). In tal caso *(caso cremoniano)* l'approssimazione può anzi ottenersi sempre con trasformazioni cubiche (2).

Esamino qui il caso più particolare in cui l'approssimazione è invece possibile con trasformazioni quadratiche. La condizione (necessaria e sufficiente) è (n. 3) *che l'* E_2 *eccezionale sia di flesso.* Nel n. 7 applico i risultati ottenuti alle trasformazioni quadratiche.

2. *La trasformazione* T *nell'intorno del 2° ordine della coppia* (O,O').

Fra i piani proiettivi π,π' si consideri la trasformazione puntuale T e sia (O,O') una coppia di punti corrispondenti. In π,π' si assumano sistemi di coordinate proiettive non omogenee x,y e x',y' con le origini risp. in O e O'. Sia O punto semplice della curva Jacobiana. Ad ogni E_1 di π di centro O corrisponde in π' un E_1' *fisso* di centro O' appartenente ad una retta che assumiamo come asse x'. Ad un E_1' generico di π' di centro O' (diverso dall'E_1'

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(1) VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo nel caso cremoniano*, « Rend. Acc. Lincei », S. 8ª, vol. II, 1947. Si veda anche BOMPIANI, *Sulle Jacobiane di una corrispondenza puntuale fra piani*, « Rend. Acc. Lincei », S. 8ª, Vol. II, 1947.

(2) VILLA, op. cit..

fisso) corrisponde in π l'E_1 *stazionario* appartenente ad una retta che assumiamo come asse x. Alla $y'=0$ corrisponde una curva dotata di nodo in O, delle cui tangenti nodali una è, nel caso cremoniano, la $y=0$ mentre l'altra si assumerà come asse y. Fra $y'=0$ e $x=0$, T determina fino all'intorno del 2° ordine di (O,O') una corrispondenza che è approssimata da un'unica proiettività *(proiettività caratteristica)*. Assumendo come *punto improprio* su $y'=0$ il corrispondente nella proiettività caratteristica del *punto improprio* di $x=0$, le equazioni di T possono scriversi:

$$\begin{aligned} x' &= ay + a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + [3] \\ y' &= \phantom{ay + a_{20}x^2 +}\ 2b_{11}xy + [3] \end{aligned}$$

dove a, b sono costanti e si indicano con [3] i termini di grado >2 degli sviluppi in serie di potenze.

Ad ogni E_2' di centro O' (a cui non appartenga l'E_1' fisso) corrisponde in T uno stesso E_2 (contenente l'E_1 stazionario), che ho chiamato *eccezionale*, di equazione $y=\frac{a_{20}}{a}x^2$. Il caso che qui interessa è quello in cui questo E_2 eccezionale è di flesso, cioè $a_{20}=0$. Questo caso si presenta per le trasformazioni quadratiche. Di più vedremo ora che la condizione è anche sufficiente in quanto una trasformazione T per cui $a_{20}=0$ è approssimabile con trasformazioni quadratiche. Le equazioni di T divengono:

$$\begin{aligned} x' &= ay + 2a_{11}xy + [3] \\ y' &= \ 2b_{11}xy + [3]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

3. *Le trasformazioni quadratiche* $\overset{1}{T}_2$ *osculatrici.*

Si ha:

Ogni trasformazione puntuale tra due piani π,π', *in una coppia* (O,O') *a Jacobiano nullo, nel caso cremoniano e in cui l'* E_2 *eccezionale è di flesso, si può approssimare fino all'intorno del* 2° *ordine con una trasformazione quadratica* $\overset{1}{T}_2$ *avente due punti singolari coincidenti.*

Necessariamente O' è il punto singolare semplice di $\overset{1}{T}_2$ in π' e O è un punto (non singolare) della retta singolare semplice di π. La retta singolare per O fa parte della Jacobiana di $\overset{1}{T}_2$ e dev'essere quindi l'asse x; la retta congiungente O col punto singolare semplice A di $\overset{1}{T}_2$ costituisce con l'asse x la conica della rete omaloidica di π avente in O punto doppio e dev'essere perciò l'asse y; la direzione per O' corrispondente ad O nella proiettività subordinata da $\overset{1}{T}_2$ fra i punti dell'asse x e le direzioni per O' è la direzione fissa e dev'essere quindi l'asse x'.

Sia $\left(-\frac{1}{\beta}, 0\right)$ il punto singolare di $\overset{1}{T}_2$ sull'asse x e $\left(0, -\frac{1}{\gamma}\right)$ quello sull'asse y. La rete omaloidica di π si può individuare mediante la conica $xy = 0$, la conica costituita dalla retta $\beta x + \gamma y + 1 = 0$ contatata due volte e la conica costituita dall'asse x e da una retta arbitraria per A (ad es. la $\beta y + 1 = 0$). Quindi $\overset{1}{T}_2$ può rappresentarsi con le equazioni:

$$3.1 \qquad \begin{aligned} x' &= \frac{p_1 x + p_2(\gamma y + 1)}{[q_1 x + q_2(\gamma y + 1)]y + (\beta x + \gamma y + 1)^2}\, y \\ y' &= \frac{rx}{[q_1 x + q_2(\gamma y + 1)]y + (\beta x + \gamma y + 1)^2}\, y \end{aligned}$$

dove p_1, p_2, q_1, q_2, r sono costanti.

Sviluppando le 3.1 in serie di potenze nell'intorno del 2° ordine dell'origine, e confrontando con le 2.1 si conclude che quando (e solo quando):

$$3.2 \qquad p_2 = a.\ r = 2b_{11},\ p_1 = 2(a_{11} + a\beta),\ q_2 = -\gamma$$

$\overset{1}{T}_2$ oscula T nella coppia (O,O'). L'asserto è dimostrato.

Segue inoltre:

Le trasformazioni quadratiche $\overset{1}{\mathrm{T}}_2$ *osculatrici* T *in* (O,O') *sono* ∞^3.

4. *L'involuzione delle direzioni d'iperosculazione.*

Utilizzeremo ora le $\overset{1}{T}_2$ osculatrici (brevemente: t. q. o.) per determinare un riferimento proiettivo intrinseco. A questo scopo fra le ∞^3 t. q. o. ne caratterizzeremo una. Riscriviamo le equazioni di T tenendo conto dei termini di 3° grado:

$$4.1 \qquad \begin{aligned} x' &= ay + 2a_{11}xy + a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + [4] \\ y' &= \phantom{ay +{}} 2b_{11}xy + b_{30}x^3 + 3b_{21}x^2y + 3b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 + [4]. \end{aligned}$$

Si verifica facilmente:

Per ogni t. q. o. esistono tre E_2', *contenenti l'* E_1' *fisso, per cui l'elemento corrispondente di un* E_3' *contenente uno di essi ha lo stesso* E_2 *sia in* T *che in t. q. o.*

D'altra parte tra gli E_2' contenenti l'E_1' fisso e gli E_1 corrispondenti in T vi è una proiettività Γ. Ai tre E_2' precedenti corrispondono in Γ tre E_1 per O (E_1 *d'iperosculazione*) di equazione complessiva

$$4.2 \qquad b_{30}y^3 + (3b_{12} + 2b_{11}\gamma)xy^2 + (3b_{21} + 4b_{11}\beta)x^2y + b_{03}x^3 = 0.$$

Siccome nella 4.2 β e γ appaiono linearmente, si conclude che *al variare della t. q. o., le terne di direzioni d'iperosculazione formano un'involuzione* I *(in generale* ∞^2*).*

5. *Sopra ∞^1 t. q. o. intrinsecamente caratterizzate.*

Fra le terne di I è unica quella apolare alla coppia $xy = 0$ (per essa dovranno annullarsi nella 4.2 i coefficienti di xy^2 e di x^2y) [3]. Le ∞^1 t. q. o. relative alla terna precedente, che si indicheranno con $\overset{2}{T}_2$, hanno in π gli stessi punti singolari. Assumiamo come *retta impropria* in π la congiungente questi due punti singolari ($\beta = \gamma = 0$). Segue per le 3.2 e 4.2:

5.1 $$p_1 = 2a_{11}, \quad q_2 = b_{12} = b_{21} = 0.$$

Le $\overset{2}{T}_2$ determinano fra le direzioni uscenti da O' e le direzioni uscenti da A una stessa proiettività Ω. Assumiamo in π' come asse y' la corrispondente in Ω della retta impropria ($a_{11} = p_1 = 0$) [4].

6. *Una t. q. o. intrinsecamente caratterizzata.*

Sia P un punto dell'intorno del 2° ordine di O sulla $x = 0$ e P' il suo corrispondente in T (e quindi anche in $\overset{2}{T}_2$ e nella proiettività caratteristica). Fra le direzioni uscenti da P e quelle uscenti da P' la T determina una proiettività (non degenere χ_1) e così ogni $\overset{2}{T}_2$ determina una proiettività (non degenere χ). Nel fascio di centro P, chiamando corrispondenti due rette che corrispondono in χ_1 e in χ ad una stessa retta del fascio di centro P', nasce una proiettività δ. Orbene: fra le ∞^1 $\overset{2}{T}_2$ è unica quella per cui nella δ relativa è unita la retta congiungente P col punto improprio della $y = 0$. Assumiamo in π' il punto singolare doppio di questa $\overset{2}{T}_2$, che indicheremo con $\overset{3}{T}_2$, come *punto improprio* ($q_1 = a_{12} = 0$). La *retta impropria* di π' è così intrinsecamente fissata.

Per determinare completamente i riferimenti proiettivi intrinseci, non rimane ormai che da fissare i punti unità. Poniamo intanto che essi si corrispondano in $\overset{3}{T}_2 (a = 2b_{11} = 1)$. Agli E'_3 aventi uno stesso E'_1 (diverso dall'E'_1 fisso) corrisponde in T uno stesso E_3 (contenente l'E_2 di flesso $y = 0$) e fra gli E'_1 per O' e gli E_3 per O (contenenti l'E_2 di flesso $y = 0$) vi è una proiettività ω [5].

[3] Se I possiede come rette fisse la $x = 0$ e la $y = 0$ in luogo delle t.q.o. per cui la terna 4.2 è apolare alla coppia $xy = 0$ si hanno le t.q.o. per cui le direzioni d'iperosculazione sono indeterminate.

[4] In π' i punti singolari *doppi* delle $\overset{2}{T}_2$ appartengono alla $x' = 0$ e la retta singolare semplice delle $\overset{2}{T}_2$ passa sempre per il punto improprio di $y' = 0$.

[5] Trascuriamo qui il caso in cui ω è degenere (che si presenta invece

In π' assumiamo come punto unità il punto appartenente alla retta corrispondente in ω all'E_3 di flesso $y = 0$ (sicchè $b_{30} = a_{30}$) e appartenente alla conica corrispondente in $\overset{3}{T}_2$ ad una delle tre rette d'iperosculazione relative a $\overset{3}{T}_2(b_{03} = -a_{30})$.

Raccogliendo:

Nei riferimenti proiettivi intrinseci indicati, la trasformazione T *può rappresentarsi fino all'intorno del 3° ordine di* (O, O′) *con le equazioni canoniche.*

$$x' = y + a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + a_{03}y^3 + [4]$$
$$y' = xy + a_{30}(x^3 - y^3) + [4]$$

e la $\overset{3}{\mathrm{T}}_2$ *è*

$$x' = y, \quad y' = xy \text{ [6]}.$$

7. *Sulle trasformazioni quadratiche.*

Applichiamo le cose dette alle trasformazioni quadratiche. In una tale trasformazione T_0 le coppie a Jacobiano nullo sono costituite da un punto singolare O' di π' e da un punto O (diverso dai punti singolari) della retta a singolare corrispondente ad O'. Siccome supponiamo O semplice per la Jacobiana (che è qui costituita dalle tre rette singolari di π) i punti singolari di un piano dovranno essere distinti, oppure due potranno anche coincidere (ma in tal caso O' sarà punto singolare semplice). La retta stazionaria è qui la retta $a(y = 0)$, la tangente nodale $(x = 0)$ è la congiungente O col punto singolare A (non appartenente ad a). La direzione fissa $(y' = 0)$ è quella corrispondente ad O nella proiettività fra i punti della $y = 0$ e le direzioni per O'. La proiettività caratteristica fra $y' = 0$ e la $x = 0$ è quella subordinata fra le due rette da T_0. Ad ogni E'_2 di centro O' (a cui non appartenga l'E'_1 fisso) corrisponde l'E_2 di flesso $y = 0$ (col quale coincide anche l'E_2 Jacobiano).

Supponiamo ora i punti singolari di T_0 distinti e assumiamo come punto *improprio* su $x = 0$ il punto singolare di T_0. Su $y = 0$ assumiamo come punto improprio il quarto armonico di O rispetto ai due punti singolari situati su tale retta. In π' assumiamo come retta impropria la retta singolare a cui non appartiene O' e come asse y' la retta corrispondente alla retta impropria di π nella proiettività subordinata da T_0 fra i fasci di centri O' e A.

nel n. 7). Ciò si verifica quando (e solo quando) $b_{30} = 0$, cioè quando l'involuzione I delle direzioni d'iperosculazione possiede la $x = 0$ come retta fissa, ossia quando l'E_2 Jacobiano è di flesso.

[6] L'interpretazione geometrica degli invarianti a_{30}, a_{21}, a_{03} non offre difficoltà. Si tenga presente che l'E_2 Jacobiano ha l'equazione $y = -3a_{30}x^2$.

Assumiamo in π come punto unità un punto (diverso da A) appartenente ad una retta singolare diversa da a; in π' assumiamo come punto unità un punto (non singolare) situato sulla retta singolare corrispondente al punto singolare (1,0) di π. Inoltre assumiamo come punto (1,2) di π' il corrispondente in T_0 di (2,—3) di π.

In questi riferimenti le equazioni di T_0 sono

$$x' = \frac{y}{1 - x^2}, \quad y' = \frac{xy}{1 - x^2}.$$

Esistono ∞^3 trasformazioni quadratiche con due punti singolari coincidenti che osculano la data in (O, O') [7]. Fra queste ne esistono ∞^1 per cui le direzioni d'iperosculazione (n. 5) sono indeterminate. Esse hanno le equazioni

$$x' = \frac{y}{\lambda xy + 1}, \quad y' = \frac{xy}{\lambda xy + 1} \qquad (\lambda \text{ parametro})$$

Segue:

Le trasformazioni quadratiche con due punti singolari coincidenti osculatrici in (O, O′) *la* T_0 *hanno in* π *per punto singolare doppio il quarto armonico di* O *rispetto ai due punti singolari di* T_0 *appartenenti alla retta singolare* a *e per punto singolare semplice lo stesso punto singolare* A *di* π [8].

Fra le suddette trasformazioni quadratiche ve n'è una sola per cui in π' *la retta singolare di* T_0 *non appartenente ad* O′ (la retta impropria) *è pure retta singolare per essa* ed è quella per cui $\lambda = 0$ [9]. Questa trasformazione può dirsi *associata* a T_0 e le sue equazioni sono

$$x' = y, \quad y' = xy.$$

In π' il punto singolare doppio della trasformazione associata è il quarto armonico rispetto ai due punti singolari di T_0 (diversi da O') del punto in cui la retta singolare che li congiunge è intersecata dalla retta fissa.

(7) In una coppia regolare una trasformazione quadratica a punti singolari distinti non può invece mai oscularsi con una trasformazione quadratica a punti singolari coincidenti.

(8) Fra i fasci A e O' queste trasformazioni quadratiche subordinano la stessa proiettività determinata da T_0.

(9) Questa trasformazione è la $\overset{3}{T}_2$ del caso generale che si può anche definire come nel n. 6.