Bollettino Unione Matematica Italiana

Candida Mesmer

Sui sistemi semplicemente infiniti di omografie piane che contengono un'omografia degenere

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.1, p. 28–34.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_1_28_0>

Sui sistemi semplicemente infiniti di omografie piane che contengono un'omografia degenere

Nota di CANDIDA MESMER (a Roma).

Sunto. - *Si esaminano i vari casi cui può dar luogo un'omografia degenere fra piani in un sistema semplicemente infinito e si determinano gli invarianti di quella nel sistema.*

1. Scopo di questa Nota è lo studio di un'omografia degenere fra piani, appartenente ad un sistema continuo semplicemente infinito di omografie [1]. Lo studio dell'intorno dell'omografia degenere Ω_0 nel sistema $\Omega(t)$ pone in evidenza una determinazione intrinseca dei riferimenti nei due piani π e $\bar{\pi}$ e successivamente gli invarianti del sistema.

2. OMOGRAFIA SEMPLICEMENTE DEGENERE. - Com'è noto un'omografia semplicemente degenere Ω_0 può sempre rappresentarsi con le equazioni:

$$\rho y^1 = x^1, \quad \rho y^2 = x^2, \quad \rho y^3 = 0. \tag{1}$$

[1] Tali sistemi di omografie nel piano sono stati già studiati da A. GHIZZETTI: *Determinazione delle curve limiti di un sistema continuo ∞^1 di curve piane omografiche*, « Acc. Naz. Lincei ». Vol. XXIII.

Ciò implica soltanto la scelta nel piano $\pi(x^1, x^2, x^3)$ del punto singolare (il cui corrispondente è indeterminato) come vertice $A_3(0, 0, 1)$ del triangolo di riferimento e nel piano $\bar{\pi}(y^1, y^2, y^3)$ della retta singolare (su cui si trovano i corrispondenti di tutti i punti di π) come $\bar{A}_1\bar{A}_2$, e inoltre che alla retta unità $(x^1 = x^2)$ nel fascio di centro A_3 in π corrisponda il punto unità (1, 1, 0) sulla $\bar{A}_1\bar{A}_2$ in $\bar{\pi}$. Se Ω_0 corrisponde al valore $t = 0$ del parametro t, da cui dipende un'omografia generica del sistema, questa potrà rappresentarsi con le equazioni:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \rho y^1 &= x^1 + t\omega_i{}^1 x^i \\ \rho y^2 &= x^2 + t\omega_i{}^2 x^i \\ \rho y^3 &= \phantom{x^2 +{}} t\omega_i{}^3 x^i. \end{aligned} \qquad \omega_i{}^k = \omega_i{}^k(t)$$

Al punto A_3 in una generica $\Omega(t)$ corrisponde il punto:

$$(3) \qquad y^1 : y^2 : y^3 = \omega_3{}^1 : \omega_3{}^2 : \omega_3{}^3.$$

Poniamo

$$\omega_i{}^k(t) = \omega_{i0}{}^k + \omega_{i1}{}^k t + \omega_{i2}{}^k t^2 + \dots,$$

quando t tende a zero si ha il punto:

$$(4) \qquad y^1 : y^2 : y^3 = \omega_{30}{}^1 : \omega_{30}{}^2 : \omega_{30}{}^3$$

che vogliamo supporre ben determinato (cioè non tutte le $\omega_{30}{}^k = 0$) e non appartenente alla retta $\bar{A}_1\bar{A}_2$. Possiamo in tal caso sceglierlo come $\bar{A}_3$ (in $\bar{\pi}$) e si ha $\omega_{30}{}^1 = \omega_{30}{}^2 = 0$ $(\omega_{30}{}^3 \neq 0)$. La tangente alla curva $\bar{L}_3$ descritta dal punto (3) per $t = 0$ è data da $y^1 : y^2 = \omega^1{}_{31} : \omega_{31}{}^2$. Se la scegliamo come retta $\bar{A}_3\bar{A}_2(y^1 = 0)$ si avrà $\omega_{31}{}^1 = 0$.

Alla retta $y^3 = 0$ corrisponde in una $\Omega(t)$ la retta $\omega_i{}^3 x^i = 0$ che per $t = 0$ è la retta $\omega_{i0}{}^3 x^i = 0$ cioè $\omega_{10}{}^3 x^1 + \omega_{20}{}^3 x^2 + \omega_{30}{}^3 x^3 = 0$. Questa può scegliersi come retta $x^3 = 0$ in π e con ciò $\omega_{10}{}^3 = \omega_{20}{}^3 = 0$. Il punto in cui essa tocca il suo inviluppo I_3 è dato da $\omega_{11}{}^3 x^1 + \omega_{21}{}^3 x^2 = 0$, $x^3 = 0$. Si può prendere questo punto (se non è inde terminato) come $A_1(x^2 = 0)$ e quindi $\omega_{11}{}^3 = 0$.

Il corrispondente di questo punto in Ω_0 è il punto $\bar{A}_1$, e il corrispondente di $\bar{A}_2$ può prendersi sulla retta ormai geometricamente fissata A_1A_2, in A_2.

Con ciò i due triangoli di riferimento in π e $\bar{\pi}$ sono fissati. Rimangono da fissare i punti unità (U in π, $\bar{U}$ in $\bar{\pi}$).

A questo scopo cerchiamo le curve corrispondenti per le $\Omega(t)$ ai punti $\bar{A}_3$ e $\bar{A}_2$.

Ad $\bar{A}_3(y^1 = y^2 = 0)$ corrisponde in π una curva che ha per tangente in $A_3(t = 0)$ la retta $\omega_{10}{}^2 x^1 = \omega_{20}{}^1 x^2$ (che supponiamo diversa dai lati del triangolo di riferimento).

Ad $\bar{A}_2(y^1 = y^3 = 0)$ corrisponde una curva che ha in A_2 per tangente $\omega_{21}{}^3 x^1 = \omega_{20}{}^1\omega_{30}{}^3 x^3$ (che pure supponiamo diversa dai lati per A_2).

Se il punto unità U in π si prende nell'intersezione di queste due rette si ha:

$$\omega_{10}{}^2 = \omega_{20}{}^1, \quad \omega_{21}{}^3 = \omega_{20}{}^1\omega_{30}{}^3.$$

Con ciò rimane anche fissato il punto unità $\overline{U}_3$ su $\overline{A}_1\overline{A}_2$.

Per fissare $\overline{U}$ in $\overline{\pi}$ consideriamo la curva corrispondente ad A_2. Il suo E_2 in $\overline{A}_2$ appartiene alla conica $(\omega_{20}{}^1)^2 x^2 y^3 = \omega_{21}{}^3 (y^1)^2$ determinata da questo E_2 e dall'essere tangente in $\overline{A}_3$ alla $\overline{A}_3\overline{A}_1$. Prendiamo $\overline{U}$ su questa (e sulla $\overline{A}_3\overline{U}_3$) e si avrà $\omega_{21}{}^3 = (\omega_{20}{}^1)^2$.

Posto per brevità $\omega_{20}{}^1 = h (\neq 0)$, si ha:

$$\omega_{10}{}^2 = h, \quad \omega_{21}{}^3 = h^2, \quad \omega_{30}{}^3 = h$$

e perciò si hanno per la $\Omega(t)$ le equazioni:

$$\begin{aligned}
\rho y^1 &= (1 + \omega_{10}{}^1 t + \omega_{11}{}^1 t^2 + [3])x^1 + (h + \omega_{21}{}^1 t + \omega_{22}{}^1 t^2)tx^2 + \omega_{32}{}^1 t^3 x^3 \\
\rho y^2 &= (h + \omega_{11}{}^2 t + \omega_{12}{}^2 t^2)tx^1 + (1 + \omega_{20}{}^2 t + \omega_{21}{}^2 t^2 + \omega_{22}{}^2 t^3)x^2 + (\omega_{31}{}^2 + \omega_{32}{}^2 t)t^2 x^3 \\
\rho y^3 &= \qquad \omega_{12}{}^3 t^3 x^1 + (h^2 + \omega_{22}{}^3 t)t^2 x^2 + (h + \omega_{31}{}^3 t + \omega_{32}{}^3 t^2)tx^3
\end{aligned}$$

Poichè si dispone di un fattore di proporzionalità si possono sempre immaginare divisi i secondi membri per

$$1 + \omega_{10}{}^1 t + \omega_{11}{}^1 t^2 + \dots;$$

con ciò le equazioni prendono la forma (limitandoci ai termini di ordine ≤ 3 in t)

$$\begin{aligned}
\rho y^1 &= x^1 + (h + \alpha t + \beta t^2)tx^2 + \gamma t^3 x^3 \\
\rho y^2 &= (h + \delta t + \varepsilon t^2)tx^1 + (1 + \xi t + \eta t^2 + \theta t^3)x^2 + (\lambda + \mu t)t^2 x^3 \\
\rho y^3 &= \nu t^3 x^1 + (h^2 + \rho t)t^2 x^2 + (h + \sigma t + \tau t^2)tx^3
\end{aligned}$$

ove $\alpha, \dots, \tau$ sono coefficienti che, come h, hanno ormai significato di invarianti appena si sia fissato il parametro t. Ad esso si può sostituire un nuovo parametro $\overline{t} = \overline{t}(t)$ tale che $\overline{t}(0) = 0$.

Se $\xi \neq 0$ può porsi: $\overline{t} = \xi t + \eta t^2 + \theta t^3 + \dots$, quindi $t = \frac{1}{\xi}\overline{t} + \dots$.

Se ora si riscrive t al posto di $\overline{t}$ si hanno equazioni del tipo (ove i coefficienti sono differenti dai precedenti)

$$\begin{aligned}
\rho y^1 &= x^1 + (h + \alpha t + \beta t^2 + \dots)tx^2 + (\gamma + \dots)t^3 x^3 \\
\rho y^2 &= x^2 + (h + \delta t + \varepsilon t^2 + \dots)tx^1 + tx^2 + (\lambda + \mu t + \dots)t^2 x^3 \\
\rho y^3 &= (\nu + \dots)t^3 x^1 + (h^2 + \rho t + \dots)t^2 x^2 + (h + \sigma t + \tau t^2 + \dots)tx^3.
\end{aligned}$$

In questa forma canonica delle equazioni sia i coefficienti che il parametro t *hanno significato invariante.* Sono invarianti: h del

1° ordine, α, δ, λ, σ del 2° ordine; β, γ, ε, μ, ν, ρ, τ del 3° ordine. Limitandoci all'invariante h, si ha per esso la seguente interpretazione geometrica.

Al punto (1, 1, 1) di π corrisponde nell'omografia $\Omega(t)$ il punto

$$y^1 : y^2 : y^3 = [1 + ht + \alpha t^2 + \ldots] : [1 + (h+1)t + (\delta + \lambda)t^2 + \ldots] :$$
$$: [h + (h^2 + \sigma)t + \ldots]t$$

che per $t \to 0$, tende al punto (1, 1, 0) (in $\bar{\pi}$) lungo l'E_1:

$$y^3 = h(y^2 - y^1)$$

e quindi l'invariante h è il birapporto di questo E_1 colle rette che da (1, 1, 0) proiettano i punti (0, 1, 1), (0, 1, 0) e (0, 0, 1).

3. Omografia doppiamente degenere. – Passiamo ora all'omografia doppiamente degenere Ω_0. Questa può sempre rappresentarsi con le equazioni:

$$\rho y^1 = x^1, \quad \rho y^2 = 0, \quad \rho y^3 = 0. \tag{1}$$

Ciò implica soltanto la scelta nel piano $\pi(x^1, x^2, x^3)$ della retta singolare (ogni punto della quale è corrispondente di un generico punto del piano $\bar{\pi}$) come A_2A_3 e nel piano $\bar{\pi}$ del punto singolare (il cui corrispondente è indeterminato, come $\bar{A}_1$. Se Ω_0 corrisponde al valore $t = 0$ del parametro t, da cui dipende un'omografia generica del sistema, questa potrà rappresentarsi con le equazioni

$$\rho y^1 = x^1 + t\omega_i{}^1 x^i, \quad \rho y^2 = t\omega_i{}^2 x^{i3} x^i, \quad \rho y^3 = t\omega_i{}^3 x^i,$$
$$\omega_i{}^k = \omega_i{}^k(t). \tag{2}$$

Alla retta A_2A_3 in una generica $\Omega(t)$ corrisponde la retta

$$(\omega_2{}^2\omega_3{}^3 - \omega_3{}^2\omega_2{}^3)y^1 + (\omega_2{}^3\omega_3{}^1 - \omega_3{}^3\omega_2{}^1)y^2 + (\omega_2{}^1\omega_3{}^2 - \omega_3{}^1\omega_2{}^2)y^3 = 0 \tag{3}$$

Poniamo $\omega_i{}^k(t) = \omega_{i0}{}^k + \omega_{i1}{}^k t + \omega_{i2}{}^k t^2 + \ldots$; quando $t = 0$ si ha la retta:

$$(\omega_{20}{}^2\omega_{30}{}^3 - \omega_{30}{}^2\omega_{20}{}^3)y^1 + (\omega_{20}{}^3\omega_{30}{}^1 - \omega_{30}{}^3\omega_{20}{}^1)y^2 +$$
$$+ (\omega_{20}{}^1\omega_{30}{}^2 - \omega_{30}{}^1\omega_{20}{}^2)y^3 = 0 \tag{4}$$

che vogliamo supporre ben determinata. Questa può scegliersi come retta $y^1 = 0$ in $\bar{\pi}$ e con ciò:

$$\omega_{20}{}^3\omega_{30}{}^1 - \omega_{30}{}^3\omega_{20}{}^1 = 0, \quad \omega_{20}{}^1\omega_{30}{}^2 - \omega_{30}{}^1\omega_{20}{}^2 = 0. \tag{5}$$

Il punto in cui essa tocca il suo inviluppo I_1 è dato da:

$$(\omega_{20}{}^3\omega_{31}{}^1 + \omega_{21}{}^3\omega_{30}{}^1 - \omega_{30}{}^3\omega_{21}{}^1 - \omega_{31}{}^3\omega_{20}{}^1)y^2 +$$
$$(\omega_{20}{}^1\omega_{31}{}^2 + \omega_{21}{}^1\omega_{30}{}^2 - \omega_{30}{}^1\omega_{21}{}^2 - \omega_{31}{}^1\omega_{20}{}^2)y^3 = 0, \qquad y^1 = 0. \tag{6}$$

Si può prendere questo punto come $\overline{A}_3(y^1 = y^2 = 0)$ e quindi:

$$(7) \qquad \omega_{20}{}^1\omega_{31}{}^2 + \omega_{21}{}^1\omega_{30}{}^2 - \omega_{30}{}^1\omega_{21}{}^2 - \omega_{31}{}^1\omega_{20}{}^2 = 0,$$

il corrispondente di questo punto per $t = 0$ è:

$$x^1 : x^2 : x^3 = 0 : \omega_{30}{}^2 : \omega_{20}{}^2$$

scegliendolo come A_3 si ha $\omega_{30}{}^2 = 0$ $(\omega_{20}{}^2 \neq 0)$.

Al punto $\overline{A}_1$ corrisponde in una $\Omega(t)$ il punto:

$$(8) \quad x^1 : x^2 : x^3 = (\omega_2{}^2\omega_3{}^3 - \omega_3{}^2\omega_2{}^3) : (\omega_3{}^2\omega_1{}^3 - \omega_1{}^2\omega_3{}^3) : (\omega_1{}^2\omega_2{}^3 - \omega_2{}^2\omega_1{}^3)$$

che per $t = 0$ è il punto:

$$x^1 : x^2 : x^3 = (\omega_{20}{}^2\omega_{30}{}^3 - \omega_{30}{}^2\omega_{20}{}^3) : (\omega_{30}{}^2\omega_{10}{}^3 - \omega_{10}{}^2\omega_{30}{}^3) : (\omega_{10}{}^2\omega_{20}{}^3 - {}_{20}{}^2\omega_{10}{}^3)$$

che vogliamo supporre ben determinato e non appartenente alla retta A_2A_3. Possiamo sceglierlo come A_1 e si ha:

$$(9) \quad \omega_{30}{}^2\omega_{10}{}^3 - \omega_{10}{}^2\omega_{30}{}^3 = \omega_{10}{}^2\omega_{20}{}^3 - \omega_{20}{}^2\omega_{10}{}^3 = 0, \quad \omega_{20}{}^2\omega_{30}{}^3 - \omega_{30}{}^2\omega_{20}{}^3 \neq 0.$$

La tangente alla curva L_1 descritta dal punto (8) è data da:

$$x^2 : x^3 = (\omega_{30}{}^2\omega_{11}{}^3 + \omega_{31}{}^2\omega_{10}{}^3 - \omega_{10}{}^2\omega_{31}{}^3 - \omega_{11}{}^2\omega_{30}{}^3) :$$
$$: (\omega_{11}{}^2\omega_{20}{}^3 + \omega_{10}{}^2\omega_{21}{}^3 - \omega_{21}{}^2\omega_{10}{}^3 - \omega_{20}{}^2\omega_{11}{}^3),$$

se la vogliamo come retta $x^3 = 0$ si avrà:

$$(10) \qquad \begin{aligned} &\omega_{11}{}^2\omega_{20}{}^3 + \omega_{10}{}^2\omega_{21}{}^3 - \omega_{21}{}^2\omega_{10}{}^3 - \omega_{20}{}^2\omega_{11}{}^3 = 0,\\ &\omega_{30}{}^2\omega_{11}{}^3 + \omega_{31}{}^2\omega_{10}{}^3 - \omega_{10}{}^2\omega_{31}{}^3 - \omega_{11}{}^2\omega_{30}{}^3 \neq 0. \end{aligned}$$

Al punto A_2 in Ω_0 corrisponde $y^1 : y^2 : y^3 = \omega_{20}{}^1 : \omega_{20}{}^2 : \omega_{20}{}^3$, scegliendolo come $\overline{A}_2$ sulla retta ormai geometricamente fissata $\overline{A}_2\overline{A}_3$ si ha:

$$\omega_{20}{}^1 = \omega_{20}{}^3 = 0.$$

Dalle precedenti relazioni lineari segue:

$$\omega_{30}{}^1 = 0, \quad \omega_{31}{}^1 = 0, \quad \omega_{30}{}^3 \neq 0, \quad \omega_{10}{}^2 = \omega_{10}{}^3 = 0, \quad \omega_{11}{}^2 \neq 0, \quad \omega_{11}{}^3 = 0.$$

I due triangoli di riferimento in π e $\overline{\pi}$ sono dunque fissati, restano da fissare i punti unità.

A questo scopo cerchiamo le curve corrispondenti ai punti A_2, A_3. Ad A_2 corrisponde in $\overline{\pi}$ una curva che ha per tangente in $\overline{A}_2$ la retta:

$$(11) \qquad y^1\omega_{21}{}^3 = y^3\omega_{21}{}^1.$$

Consideriamo ora la curva corrispondente ad A_3. Il suo E_2 in $\overline{A}_3$ appartiene alla conica $y^3y^1(\omega_{31}{}^2)^2 = \omega_{30}{}^3\omega_{32}{}^1(y^2)^2$ determinata da questo E_2 e dall'essere tangente in $\overline{A}_3$ alla $\overline{A}_2\overline{A}_3$. Se il punto unità $\overline{U}$

si prende su questa conica e sulla retta (11), si ha:

$$\omega_{21}{}^3 = \omega_{21}{}^1, \quad (\omega_{31}{}^2)^2 = \omega_{20}{}^3\omega_{32}{}^1$$

e con ciò rimane fissato U_1 ponendo $\omega_{20}{}^2 = \omega_{30}{}^3$.

Per fissare U in π consideriamo la curva corrispondente ad $\overline{A}_2$. Il suo E_2 in A_2 appartiene alla conica $(\omega_{21}{}^3)^2 x^2 x^1 = (\omega_{30}{}^3)^2 \omega_{21}{}^1 (x^3)^2$ determinata da questo E_2 e dall'essere tangente in A_2 alla $A_2 A_3$.

Prendendo U su questa conica e sulla $A_1 U_1$ si avrà:

$$(\omega_{21}{}^3)^2 = (\omega_{30}{}^3)^2 \omega_{21}{}^1,$$

Posto per brevità $\omega_{30}{}^3 = \omega_{20}{}^2 = h$, $(h \neq 0)$ si ha:

$$\omega_{21}{}^3 = \omega_{21}{}^1 = h^2, \quad \omega_{32}{}^1 = \frac{(\omega_{31}{}^2)^2}{h}$$

e le equazioni della $\Omega(t)$ nelle ipotesi ammesse sono:

$$\begin{aligned}
\rho y^1 &= (1 + \omega_{10}{}^1 t + \omega_{11}{}^1 t^2 + [3])x^1 + (h^2 + \omega_{22}{}^1 t)t^2 x^2 + \omega_{32}{}^1 t^3 x^3 \\
\rho y^2 &= (\omega_{11}{}^2 + \omega_{12}{}^2 t)t^2 x^1 + (h + \omega_{21}{}^2 t + \omega_{22}{}^2 t^2)t x^2 + (\omega_{31}{}^2 + \omega_{32}{}^2 t)t^2 x^3 \\
\rho y^3 &= \omega_{12}{}^3 t^3 x^1 + (h^2 + \omega_{22}{}^3 t)t^2 x^2 + (h + \omega_{31}{}^3 t + \omega_{32}{}^3 t^2)t x^3.
\end{aligned}$$

Tenendo conto dell'arbitrarietà del fattore di proporzionalità e del parametro, in modo analogo a quello seguito nel caso precedente, si arriva alla *forma canonica:*

$$\begin{aligned}
\rho y^1 &= x^1 + (1 + \alpha t + \ldots)t^2 x^2 + (\beta^2 + \ldots)t^3 x^3 \\
\rho y^2 &= (\gamma + \delta t + \ldots)t^2 x^1 + (1 + \sigma t + \varepsilon t^2 + \ldots)t x^2 + (\beta + \eta t + \ldots)t^2 x^3 \\
\rho y^3 &= (\theta + \ldots)t^3 x^1 + (1 + \nu t + \ldots)t^2 x^2 + (1 + \lambda t + \mu t^2 + \ldots)t x^3.
\end{aligned}$$

In queste equazioni sia i coefficienti che il parametro t *hanno significato invariante.* Non vi sono invarianti del 1° ordine; sono invarianti del 2° ordine β, γ, σ e del 3° ordine α, δ, ε, η, ν, θ.

4. Interpretazione geometrica degli invarianti del 2° ordine. – Al punto (0, 1, 1) di π corrisponde nell'omografia $\Omega(t)$ (nel piano $\overline{\pi}$) il punto:

$$y^1 : y^2 : y^3 = t : [1 + (\sigma + \beta)t] : [t + 1]$$

che, per $t \to 0$, tende al punto (0, 1, 1) lungo l'E_1: $y^2 - y^3 = (\sigma + \beta - 1)y^1$.

Possiamo interpretare il coefficiente $\sigma + \beta - 1$ come il birapporto di questo E_1 con le rette che da (0, 1, 1) proiettano i punti (0, 1, 0), (1, 0, 0) e (1, 1, 0).

Al punto (1, 0, 1) di π corrisponde nell'omografia $\Omega(t)$ il punto:

$$y^1 : y^2 : y^3 = 1 : [\gamma + \beta]t^2 : [1 + \lambda t]t$$

che, per $t \to 0$, tende al punto (1, 0, 0) (in $\bar{\pi}$) lungo l'E_2:

$$y^1 y^2 = (\gamma + \beta)(y^3)^2,$$

in cui $\gamma + \beta$ è il birapporto della conica $y^1 y^2 = (\gamma + \beta)(y^3)^2$ contenente l'E_2, con la conica ad essa bitangente nei punti (0, 1, 0), (1, 0, 0) e passante per (1, 1, 1) insieme alle coniche degeneri del loro fascio.

Al punto (1, 1, 1) di π corrisponde nella $\Omega(t)$ (in $\bar{\pi}$) il punto:

$$y^1 : y^2 : y^3 = 1 : [1 + (\gamma + \sigma + \beta)t]t : [t + 1]t$$

che, per $t \to 0$, tende al punto (1, 0, 0) lungo l'E_2:

$$y^1(y^2 - y^3) = (\gamma + \sigma + \beta - 1)(y^3)^2,$$

in cui $\gamma + \sigma + \beta - 1$ è il birapporto della conica:

$$y^1(y^2 - y^3) = (\gamma + \sigma + \beta - 1)(y^3)^2$$

contenente l'E_2, con la conica ad essa bitangente nei punti (0, 1, 0), (1, 0, 0) e passante per (1, 0, — 1) insieme alle coniche degeneri del loro fascio.

La conoscenza dei tre birapporti indicati equivale a quella degli invarianti del 3° ordine.