Carmelo Longo

Le rette di una superficie cubica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.1, p. 23–24.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_1_23_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1947.

Le rette di una superficie cubica

Nota di Carmelo Longo (a Roma)

Sunto - *Si dimostra con considerazioni differenziali l'esistenza delle 27 rette di una superficie cubica priva di punti doppi.*

1. Sono note varie dimostrazioni dell'esistenza di 27 rette sopra una superficie cubica F^3 (di S_3) (¹) priva di punti doppi (²).

Quella che qui ne do tende a mostrare quanto sia opportuna, anche nello studio di enti algebrici, la considerazione di fatti differenziali.

2. Com'è noto, data una superficie ed un suo punto, O, vi sono ∞^3 quadriche mediante le quali si può approssimare la superficie fino all'intorno del 2° ordine di O: in altri termini ogni *calotta* del 2° ordine appartiene ad ∞^3 quadriche (³).

(¹) Vedi, p. es., Conforto. *Le superficie razionali,* Zanichelli; Bertini. *Complementi di Geometria Proiettiva,* Zanichelli.

(²) Se F^3 ha un punto doppio è evidente l'esistenza di rette di F^3 passanti per il punto doppio.

(³) Vedi, p.es. Bompiani. *Lezioni di Geometria Descrittiva,* litografie. Università di Roma (parte IV^a, cap. V°).

Non è più così quando dalle calotte del 2° ordine si passa a quelle del 3° ordine (incluso) di un punto regolare O della superficie.

Si vede facilmente che *se una calotta del 3° ordine appartiene ad una quadrica essa deve soddisfare a due condizioni (e allora esistono* ∞^1 *quadriche per la calotta).*

Quando ciò avviene diciamo che si ha una *calotta quadrica* o anche che il punto della superficie (centro della calotta) è un *punto quadrico.*

Il fatto che un punto di una superficie, per essere quadrico, deve soddisfare a due condizioni porta che: *quando non vi siano sopra una superficie punti doppi vi è in generale un numero finito di punti quadrici* ([4]).

3. Consideriamo una superficie algebrica del 3° ordine F^3 priva di punti doppi e sia O uno dei suoi punti quadrici.

Le generatrici per O di una quadrica contenente la calotta del 3° ordine di centro O hanno ivi quattro intersezioni coincidenti con F^3. Quelle due generatrici sono quindi rette di F^3.

Il piano tangente in O interseca F^3 secondo le due generatrici ed un'altra retta non passante per O.

È così stabilita l'esistenza di rette su F^3.

4. Se si vuol proseguire nell'esame delle rette di F^3 si può notare che assunte le tre rette sul piano $t=0$, tangente in O, come $x=0, y=0, z=0$, l'equazione della superficie è del tipo:

$$xyz + tQ(x,y,z,t,) = 0$$

ove $Q=0$ è l'equazione di una quadrica. Si tagli la superficie con un piano $x=\lambda t$: la sezione è costituita dalla retta $x=t=0$ e da una conica residua. Si determini λ in modo che la conica si spezzi: si trova $\lambda=\infty$ (cioè $t=0$) oppure λ è radice di una equazione di 4° grado. Sicchè esistono (come è noto) cinque di tali piani e perciò dieci rette incidenti $x=t=0$.

Se si scartano i lati del triangolo da cui siamo partiti, a ciascuno di essi si appoggiano otto rette (e nessuna di quelle 8 che si appoggiano ad un lato può appoggiarsi ad un altro); sicchè si hanno $3+3.8=27$ rette di F^3.

Non ne possono esistere altre, perchè una retta di F^3 deve incidere il piano del triangolo in un punto di un suo lato.

([4]) Poichè un punto doppio è anche un punto quadrico, l'esistenza di un punto doppio potrebbe assorbire tutti i punti quadrici della superficie.