BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUIGI CASTOLDI

**Sopra una classe di sistemi dinamici
soggetti a vincoli di mobilità per cui si
annullano i corrispondenti termini di
anonomia**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 2
(1947), n.1, p. 19–23.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_1_19_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_1_19_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sopra una classe di sistemi dinamici soggetti a vincoli di mobilità per cui si annullano i corrispondenti termini di anolonomia.

Nota di LUIGI CASTOLDI (a Genova)

Sunto. - *Si rileva l'esistenza di particolari sistemi anolonomi per cui, nelle corrispondenti equazioni dinamiche di Volterra-Hamel, per opportuna scelta di parametri, si annullano i termini di anolonomia.*

1. In un recente lavoro ⁽¹⁾ ci è stato possibile istituire equazioni dinamiche del tutto analoghe a quelle di VOLTERRA-HAMEL ⁽²⁾ e valide per sistemi a vincoli anolonomi anche non lineari nelle velocità.

Nei primi membri di tali equazioni compaiono, notoriamente, dei termini (« di anolonomia ») che si annullano allorchè le equazioni stesse si applicano a sistemi olonomi, i termini rimanenti riducendosi allora ai noti binomi lagrangiani.

E' scopo della presente nota mostrare che la accennata riduzione delle equazioni dinamiche si verifica non soltanto nel caso richiamato, ma anche quando esse si applichino a una particolare

⁽¹⁾ LUIGI CASTOLDI, *Equazioni lagrangiane per i sistemi a vincoli anolonomi non lineari nelle velocità*, « Rendiconti dell'Istituto lombardo di Scienze e Lettere ». (In corso di pubblicazione).

⁽²⁾ Cfr., per es., LEVI - CIVITA e AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. II, p. I, pag. 409.

classe di sistemi anolonomi e per una particolare scelta dei parametri di riferimento.

2. Per mostrar ciò, consideriamo un sistema dinamico soggetto a vincoli anolonomi generali.

$$(1) \quad f_i(q_r, \dot{q}_r, t) = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, m \\ r = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}$$

tra gli n parametri lagrangiani q_r che supporremo essenziali, le loro derivate rispetto al tempo e il tempo stesso.

Supposta di caratteristica m la matrice funzionale delle (1) rispetto alle $\dot{q}_r$, le (1) stesse potranno risolversi rispetto ad m di queste ultime, prendendo così la forma

$$(2) \quad \dot{q}_h = \dot{q}_h(q_r, \dot{q}_\alpha, t) \quad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \dots, m \\ \alpha = m + 1, m + 2, \dots, n \\ r = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix},$$

dove all'indice h si intendono attribuiti i valori da 1 a n , e all'indice α i valori da $m + 1$ a n .

Scegliendo le $\dot{q}_\alpha$ come caratteristiche cinetiche e associando alle (2) le identità

$$(2') \quad \dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha \quad (\alpha = m + 1, m + 2, \dots, n),$$

le equazioni generalizzate di VOLTERRA-HAMEL (1) assumono, come facilmente si verifica, la forma seguente

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\alpha} - \sum_h \frac{\partial T^*}{\partial q_h} \varkappa_{h\alpha} - \frac{\partial T^*}{\partial q_\alpha} + \sum_h \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_h} \left[\sum_k \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial \dot{q}_k} \varkappa_{k\alpha} + \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \varkappa_{h\alpha} \right] = \Phi_\alpha,$$

dove $T(q_r, \dot{q}_r, t)$ è l'energia cinetica del sistema;

$$(4) \quad T^* = T[q_r, \dot{q}_\alpha, \dot{q}_h(q_r, \dot{q}_\alpha, t), t]$$

è la funzione delle sole $q_r, \dot{q}_\alpha, t$ che si ottiene da T sostituendovi le $\dot{q}_h$ ($h = 1, 2, \dots, m$) colle loro espressioni (2);

$$(5) \quad \varkappa_{h\alpha} = \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

e

$$(6) \quad \Phi_\alpha = \sum_h Q_h \varkappa_{h\alpha} + Q_\alpha,$$

i secondi membri delle (5) essendo calcolati in base alle (2) stesse, e Q_r rappresentando le componenti lagrangiane delle forze attive.

Supponiamo ora che per il sistema dinamico considerato si presentino alcune circostanze particolari che passiamo ad enunciare:

I. Con opportuna scelta dei parametri q_x , sia l'energia cinetica T che i secondi membri delle (2) risultino dipendenti dalle sole q_x ($x = m + 1, \dots, n$) (oltrechè, naturalmente, dalle velocità e dal tempo) e non dalle q_h ($h = 1, 2, \dots, m$).

II. Colla scelta fatta delle q_x , l'energia cinetica T risulti scomponibile nella somma di due termini

$$(7) \quad T = T_{(x)} + T_{(h)},$$

di cui $T_{(x)}$ è funzione delle sole $\dot{q}_x$ e $T_{(h)}$ delle sole q_h (oltrechè, entrambi, naturalmente, delle q_x e di t).

Ammesso ciò, sarà

$$(8) \quad T^* = T_{(x)} + T_{(h)}[q_x, \dot{q}_h(q_x, \dot{q}_x, t), t],$$

mentre le (3) si riducono a

$$(3') \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_x} - \frac{\partial T^*}{\partial q_x} + \sum_1^m \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \left[\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial q_x} - \frac{d}{dt} \mathfrak{S}_{hx} \right] = \Phi_x.$$

Poniamo ora

$$(9) \quad \sum_1^m \frac{\partial T_{(h)}}{\partial q_h} \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial q_x} = \left(\frac{\partial T_{(h)}^*}{\partial q_x} \right)',$$

dove coll'apice all'espressione del secondo membro si è voluto denotare che la derivazione rispetto a q_x va fatta soltanto in quanto q_x entra in $T_{(h)}^*$ attraverso le $\dot{q}_h$.

Con ciò le equazioni dinamiche diventano ulteriormente:

$$(3'') \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_x} - \frac{\partial T^*}{\partial q_x} + \left(\frac{\partial T_{(h)}^*}{\partial q_x} \right)' - \sum_1^m \frac{\partial T_{(h)}}{\partial q_h} \frac{d}{dt} \mathfrak{S}_{hx} = \Phi_x.$$

Supponiamo a questo punto che per il sistema considerato si verifichino le seguenti ulteriori condizioni:

III. Sia:

$$(10) \quad \left(\frac{\partial T_{(h)}^*}{\partial q_x} \right)' = \sum_1^m \frac{\partial T_{(h)}}{\partial q_h} \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial q_x} = 0;$$

IV. Le $\dot{q}_h$ fornite da (2) risultino esplicitamente indipendenti da t (vincoli anolonomi indipendenti dal tempo), e dipendenti linearmente dalle q_x (il che si verifica, per es., se i vincoli assegnati sono lineari nelle velocità).

Allora è anche:

$$\begin{aligned} \sum_1^m \frac{\partial T_{(h)}}{\partial q_h} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial q_x} &= \sum_1^m \frac{\partial T_{(h)}}{\partial q_h} \left[\sum_\beta^n \frac{\partial^2 \dot{q}_h}{\partial q_x \partial q_\beta} \dot{q}_\beta \right] = \frac{\partial}{\partial q_x} \sum_{m+1}^n \left[\sum_1^m \frac{\partial T_{(h)}}{\partial q_h} \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial q_\beta} \right] \dot{q}_\beta - \\ &- \sum_\beta^n \left[\sum_1^m \frac{\partial^2 T_{(h)}}{\partial q_h \partial q_x \partial q_\beta} \right] \dot{q}_\beta - \sum_1^m \frac{\partial T_{(h)}}{\partial q_h} \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial q_x}. \end{aligned}$$

Dei tre termini dell'ultimo membro il primo e il terzo si annullano in virtù dell'ipotesi III, il secondo per effetto della IV.

Risulta di qui, in definitiva, che, nelle ipotesi ammesse, le equazioni del moto si riducono alla forma seguente

$$(11) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T^*}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha \quad (\alpha = m + 1, \dots, n).$$

Nelle (11) i primi membri hanno la classica forma dei binomi lagrangiani che compaiono nelle equazioni dinamiche dei sistemi olonomi e non contengono più traccia dei termini di anolonomia.

In altri termini, verificandosi le ipotesi ammesse, le equazioni del moto del sistema dato sono le stesse che varrebbero per un sistema olonomo dotato di $n - m$ gradi di libertà e di energia cinetica $T^*(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$, soggetto a forze attive le cui componenti lagrangiane Φ_α sono fornite dai secondi membri delle (6).

3. Le condizioni I, II, III, IV, sono fortemente restrittive della generalità del sistema considerato; onde appare opportuno presentare almeno un esempio in cui esse si trovino verificate.

Consideriamo a tale scopo un disco circolare omogeneo di raggio a il cui piano è mantenuto verticale da appositi supporti e capace di rotolare senza strisciamento su un piano orizzontale scabro.

Introdotti in questo piano due assi cartesiani ortogonali x, y come parametri del sistema possono assumersi: le coordinate x, y , del punto di contatto H del disco col piano d'appoggio, l'angolo ϖ che la tangente in H al disco forma coll'asse x , e infine un angolo φ caratterizzante le rotazioni del disco attorno al proprio asse.

Fra i quattro parametri x, y, ϖ, φ si stabiliscono immediatamente le relazioni

$$(12) \quad \begin{cases} \dot{x} = a \cos \varpi \dot{\varphi} \\ \dot{y} = a \sin \varpi \dot{\varphi}, \end{cases}$$

che rappresentano due vincoli anolonomi lineari nelle velocità.

Indicando con m la massa del disco, con A il suo momento d'inerzia assiale e con D il suo momento d'inerzia diametrale, si perviene immediatamente alla seguente espressione dell'energia cinetica:

$$(13) \quad T = \frac{1}{2} [m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + A\dot{\varphi}^2 + D\dot{\varpi}^2].$$

con

$$(13') \quad T_{(n)} = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad \text{e} \quad T_{(x)} = \frac{1}{2} (A\dot{\varphi}^2 + D\dot{\varpi}^2).$$

Tenendo conto delle (12) si ottiene poi :

$$(14) \quad T^* = \frac{1}{2} [(ma^2 + A)\dot{\varphi}^2 + D\dot{s}^2],$$

con

$$(14') \quad T_{(h)}^* = \frac{1}{2} ma^2 \dot{\varphi}^2 \quad \text{e} \quad T_{(s)}^* = \frac{1}{2} (A\dot{\varphi}^2 + D\dot{s}^2).$$

Si verifica subito sulle relazioni da (12) a (14') che tutte le condizioni I, II, III, IV sono qui verificate. Quanto alla III, essa risulta senz'altro soddisfatta in quanto nè $T_{(h)}$ nè $T_{(h)}^*$ dipendono dai parametri s e φ . Sono dunque applicabili le equazioni (11), le quali, indicando X, Y, Θ, Φ le componenti lagrangiane della forza attiva e tenendo conto delle espressioni delle $s_{h\alpha}$ che risultano dalle (12), assumono qui la forma seguente

$$(15) \quad \begin{cases} (ma^2 + A)\ddot{\varphi} = a(\cos sX + \sin sY) + \Phi \\ D\ddot{s} = \Theta. \end{cases}$$