Bollettino
Unione Matematica Italiana

Landolino Giuliano

Sul teorema di confronto di Sturm

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.1, p. 16–19.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_1_16_0>

Sul teorema di confronto di Sturm

Nota di LANDOLINO GIULIANO (a Pisa) (*)

Sunto. - *Si fa vedere come un elegante ragionamento adoperato dal* TONELLI *per provare il teorema di separazione per equazioni differenziali del secondo ordine, anche non lineari, possa utilmente sfruttarsi per dimostrare un teorema di confronto per due equazioni differenziali lineari del secondo ordine.*

1. Lo scopo di questa Nota è di presentare, in un caso particolare, ma importante, una nuova dimostrazione del teorema di confronto di STURM che si ottiene sfruttando a un certo punto del

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa.

ragionamento una interessante osservazione di TONELLI [1] su cui questo A. si è basato per provare rapidamente il teorema di separazione di STURM anche nel caso di un' equazione differenziale del secondo ordine non lineare. M' è sembrato utile il farla conoscere ai lettori del Bollettino [2].

Il teorema che vogliamo provare è il seguente:

— « *Siano* p(x), q(x), $q_1(x)$ *tre funzioni definite e continue nell' intervallo* (a, b). *Sia* $y_1(x)$ *una soluzione non identicamente nulla dell' equazione differenziale,*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

tale che $y_1(a) = y_1(b) = 0$.

Se, in tutto (a, b), *è* $q_1(x) \geqq q(x)$ *e se* $z_1(x)$ *è una soluzione, in* (a, b), *dell' equazione differenziale,*

$$z'' + p(x)z' + q_1(x)z = 0 \tag{2}$$

non può essere, in tutto (a, b), $z_1(x) \neq 0$.

Proviamo che non può essere $z_1(x) > 0$ in tutto (a, b).

Ammettiamo che sia sempre $z_1(x) > 0$.

α) Supponiamo, in primo luogo, che sia $q_1(x) > q(x)$.

Senza alterare la generalità, possiamo supporre che a e b siano due zeri consecutivi di $y_1(x)$ e che sia per ogni x tale che $a < x < b$, $y_1(x) > 0$. Se consideriamo il fascio di integrali della (1), $y = cy_1(x)$, $c > 0$, abbiamo che per c sufficientemente piccolo (grande) la curva $y = cy_1(x)$ non incontra (ha punti in comune con) la curva $y = z_1(x)$.

Esiste dunque almeno un valore $\bar{c}$ di c tale che $z_1(x) - \bar{c}y_1(x)$ sia sempre $\geqq 0$ in (a, b), annullandosi in questo intervallo almeno

(1) Vedi L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* Vol. II, pag. 217, Zanichelli - Bologna, 1923. Vedi anche: L. TONELLI, *Un' osservazione su un teorema di* STURM. Bollettino U. M. I. 1927, pp. 126-128.

(2) M. PICONE stabilisce il teorema di confronto tra due equazioni differenziali lineari del secondo ordine del tipo:

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{dy}{dx}\right] - Q(x)y(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[\theta_1(x)\frac{dz}{dx}\right] - Q_1(x)z(x) = 0$$

con l'uso di una sua notevole identità. (Cfr.) M. PICONE: *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un' equazione differenziale lineare del secondo ordine.* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (1), XI (1910) pp. 1-141, p. 20.

una volta [3]. Se x_0 è uno zero di $z_1(x) - \bar{c}y_1(x)$ contenuto in (a, b), x_0 non può coincidere nè con a nè con b perchè in questi punti è $y_1(a) = y_1(b) = 0$ e $z_1(a) \neq 0$, $z_1(b) \neq 0$. E' perciò $a < x_0 < b$. In x_0 la $z_1(x) - \bar{c}y_1(x)$ avrà un minimo e dovrà essere:

$$z_1''(x_0) - \bar{c}y_1''(x_0) \gtreqless 0 \tag{3}$$

Da (1) e (2) si ottiene, d'altra parte, sottraendo membro a membro:

$$z_1''(x_0) - \bar{c}y_1''(x_0) + \{q_1(x_0) - q(x_0)\}z_1(x_0) = 0$$

e quindi:

$$z_1''(x_0) - \bar{c}y_1''(x_0) < 0$$

che contraddice alla (3). Dunque non può essere sempre, in tutto (a, b), $z_1(x) > 0$. Analogamente si prova che non può essere, in tutto (a, b), $z_1(x) < 0$.

β) Se è $q_1(x) \equiv q(x)$ il punto x_0 di cui in α) non può esistere per il teorema di unicità della soluzione della (1) passante per un punto, con data direzione. In tal caso si ottiene il teorema di separazione di STURM.

γ) Nel caso generale, si consideri, l'equazione ausiliaria:

$$u'' + p(x)u' + q_2(x)u = 0 \tag{4}$$

dove $q_2(x) = q_1(x) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Per ε sufficientemente piccolo (e in virtù dell'unicità e quindi della continuità della soluzione della (1) rispetto al parametro ε) la soluzione $u = u(x)$ della (4) tale che $u(a) = z_1(a)$, $u'(a) = z'_1(a)$ dovrà risultare tale che $u(x) > 0$ in tutto (a, b). Ma essendo $q_2(x) > q_1(x)$ in tutto (a, b), ciò è impossibile per α).

Completiamo il teorema dimostrato provando:

*Se **non** è, in tutto* (a, b), $q_1(x) \equiv q(x)$, *ma sempre* $q_1(x) \gtreqless q(x)$ *la* $z_1(x)$ *ha uno zero **interno** ad* (a, b).

Moltiplichiamo la (1) per $z_1(x)$ e la (2) per $y_1(x)$ e sottragghiamo, membro a membro:

$$(y_1''z_1 - z_1''y_1) + p(x)(y_1'z_1 - z_1'y_1) + \{q(x) - q_1(x)\}y_1z_1 = 0$$

ossia, essendo:

$$y_1''z_1 - z_1''y_1 = \frac{d}{dx}(y_1'z_1 - z'_1y_1)$$

posto $u = y_1'z_1 - z_1'y_1$, abbiamo:

$$u' + pu + (q - q_1)y_1z_1 = 0$$

[3] Cfr. G. SANSONE: *Equazioni dfferenziali nel campo reale*. Parte II, p. 113 - Zanichelli - Bologna 1941.

da cui:

$$u = e^{-\int_a^x p\,dx} \left\{ \int_a^x (q_1 - q) y_1 z_1 \quad e^{\int_a^x p\,dx}\, dx + c \right\}$$

$$y_1' z_1 - z_1' y_1 = e^{-\int_a^x p\,dx} \left\{ \int_a^x (q_1 - q) y_1 z_1 \quad e^{\int_a^x p\,dx}\, dx + c \right\} \tag{4}$$

dove $c = y_1'(a) z_1(a) - z_1'(a) y_1(a) = y_1'(a) z_1(a)$.

Essendo $y_1'(a) > 0$, $y_1'(b) < 0$, se fosse sempre, per $a < x < b$, $z_1(x) > 0$, sarebbe $c = y_1'(a) z_1(a) \gtreqless 0$ e per $x = b$ il secondo membro di (4) sarebbe > 0.

Dunque $y_1'(b) z_1(b) - z_1'(b) y_1(b) = y_1'(b) z_1(b) > 0$ e da qui $z_1(b) < 0$ mentre, per l' ipotesi ammessa, dovrebbe essere $z_1(b) \geq 0$. Quanto si voleva provare rimane così stabilito.