Bollettino Unione Matematica Italiana

Beniamino Segre

Sul contatto di due varietà

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.1, p. 12–16.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_1_12_0>

Sul contatto di due varietà.

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Bologna). (*)

Sunto. - *Determinazione di certe omografie e di certe varietà algebriche intrinsecamente associate a due varietà analitiche fra loro tangenti in un punto, e deduzione di alcuni invarianti proiettivi di contatto di queste ultime.*

1. Siano V_m, $\overline{V}_m$ due varietà analitiche, della stessa dimensione $m \geq 2$, situate in un S_n proiettivo e tangenti fra loro in un punto O, semplice per entrambe, nel quale ammettano uno stesso spazio r-osculatore S_a ed uno stesso spazio $(r+1)$-osculatore S_b $(r \geq 1,$ $m \leq a < b \leq n)$. Nel n. 3 di questa Nota si mostra che, qualora la differenza $b - a$ abbia il valore regolare

$$b - a = \binom{r+m}{r+1}, \tag{1}$$

gli intorni di ordine $r+1$ del punto O sulle V_m, $\overline{V}_m$ determinano intrinsecamente un'*omografia* nella stella di centro S_a situata in S_b, nonchè un'insieme di *coni algebrici* di vertice O ed ordine $r+1$, generalmente in numero di $b - a$, appartenenti allo spazio S_m tangente in O alle V_m, $\overline{V}_m$.

Gli invarianti proiettivi di quell'omografia e di questi coni risultano pertanto *invarianti proiettivi di contatto* di V_m e $\overline{V}_m$ in O, dipendenti dagli intorni di ordine $r+1$. Ne conseguono inoltre *rappresentazioni canoniche* di V_m, $\overline{V}_m$ nell'intorno di O, qui indicate (n. 4) nel caso che la suddetta omografia sia generale.

2. I risultati di cui al n. 1 possono venir applicati $k-1$ volte (con $r = 1, 2, \ldots, k-1$) se V_m e $\overline{V}_m$ hanno in O lo stesso spazio

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

s-osculatore S_{d_s}, di dimensione regolare

$$d_s = \binom{m+s}{s} - 1,$$

per $s = 1, 2, \dots, k$ (ove $k \geq 2$). In quest'ipotesi le V_m, $\overline{V}_m$, oltre agli invarianti ottenibili nel modo suddetto, ammettono $k - 1$ *invarianti proiettivi di contatto* dipendenti dagli intorni degli ordini $2, 3, \dots, k$. A tali invarianti è pervenuto recentemente per via algoritmica B. Su [1], il quale ha segnalato, ma non risolto, il problema di darne una costruzione geometrica.

Qui, nel n. 5, si giunge a questi invarianti col porli in relazione colle omografie invarianti fornite dal n. 3 e con quanto è già noto nel caso del contatto di due curve [2], il che in pari tempo porge la loro *interpretazione geometrica*. Alcuni sviluppi a ciò inerenti trovansi nel n. 6, dove inoltre, a mo' d'esempio, sono ottenuti tutti gli invarianti proiettivi del 2° ordine di due superficie di S_5 aventi un contatto del 1° ordine in un punto semplice.

3. Colle ipotesi e notazioni del n. 1, introduciamo in S_n coordinate proiettive non omogenee $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ assumendo O come origine, e rispettivamente S_m, S_a, S_b quali spazi coordinati

$$x_{m+1} = \dots = x_n = 0, \quad x_{a+1} = \dots = x_n = 0, \quad x_{b+1} = \dots = x_n = 0,$$

dove naturalmente le ultime equazioni vengono a mancare se $b = n$, nel qual caso S_b coincide collo spazio ambiente S_n. Nell'intorno di O la varietà V_m può allora rappresentarsi con equazioni della forma

$$x_i = f_i(x_1, \dots, x_m) \qquad (i = m+1, \dots, a) \tag{2}$$

$$x_j = \varphi_j(x_1, \dots, x_m) + \dots \qquad (j = a+1, \dots, b) \tag{3}$$

$$x_l = g_l(x_1, \dots, x_m) \qquad (l = b+1, \dots, n), \tag{4}$$

dove le (2) o le (4) vanno soppresse se $a = m$ o se $b = n$, ed i simboli nei secondi membri hanno i seguenti significati. Nelle (2) le f_i sono funzioni analitiche delle $x_1, \dots, x_m$, aventi in O uno zero almeno del 2° ordine, che non ammettano alcuna combinazione lineare a coefficienti costanti dotata in O di uno zero di ordine maggiore di r. Nelle (3) le φ_j sono $b - a$ forme linearmente indipendenti, di grado $r + 1$ nelle $x_1, \dots, x_m$, ed i puntini stanno per termini di grado superiore. Infine nelle (4) le g_l sono funzioni analitiche delle $x_1, \dots, x_m$, aventi in O uno zero di ordine maggiore di $r + 1$.

(1) B. Su, *Alcune invarianti di contatto di due varietà in uno spazio proiettivo*, questo fascicolo del « Bollettino », pp. 9-12.

(2) Cfr. B. Segre, *Sugli elementi curvilinei che hanno comuni le origini ed i relativi spazi osculatori*, « Rend. Acc. Lincei », (6) 22 (1935_2), 392-399.

Un S_{n-1} di S_n che passi per S_a, ma non per S_b, si rappresenta colla

$$\sum_{j=a+1}^{b} \lambda_j x_j + \sum_{l=b+1}^{n} \mu_l x_l = 0, \tag{5}$$

dove le λ, μ sono costanti e le λ non sono tutte nulle. Questo S_{n-1} taglia S_b secondo un S_{b-1} contenente S_a, rappresentato in S_b dall'equazione

$$\sum_{j=a+1}^{b} \lambda_j x_j = 0\,; \tag{6}$$

esso inoltre sega su V_m una V_{m-1} avente in O un punto $(r+1)$-plo il cui cono tangente, di vertice O, giace in S_m ed è ivi rappresentato dalla

$$\sum_{j=a+1}^{b} \lambda_j \varphi_j(x_1, \ldots, x_m) = 0. \tag{7}$$

Al variare delle λ lo spazio (6) descrive tutta la stella Σ degli ∞^{b-a-1} S_{b-1} di S_b passanti per S_a. Inoltre, in virtù della (1) e di quanto si è detto dianzi circa le (3), il cono (7) descrive il sistema lineare Φ formato da tutti gli ∞^{b-a-1} V_{m-1}^{r+1} — coni di vertice O situati in S_m; ed è chiaro che, associando fra loro lo spazio (6) ed il cono (7) quando provengano nel modo indicato dallo stesso iperpiano (5), e quindi dagli stessi valori delle λ, otteniamo un riferimento omografico intrinseco fra Σ e Φ, diciamolo Ω.

Un altro riferimento omografico, $\overline{\Omega}$, viene similmente indotto fra Σ e Φ da $\overline{V}_m$.

Pertanto $\Theta = \Omega\overline{\Omega}^{-1}$ è una trasformazione della stella Σ in sè, definita intrinsecamente dagli intorni di ordine $r+1$ di O su V_m, $\overline{V}_m$.

La Θ possiede $b-a-1$ invarianti proiettivi indipendenti, dati ad esempio dai mutui rapporti delle radici della sua equazione caratteristica, e ciascuno di questi è conseguentemente un invariante di contatto di V_m e $\overline{V}_m$. L'omografia Θ ammette poi sempre degli S_{b-1} uniti, generalmente in numero di $b-a$, ognuno dei quali vien mutato da Ω e da $\overline{\Omega}$ in uno stesso V_{m-1}^{r+1} — cono del sistema lineare Φ. Si ottiene così in S_m un insieme di V_{m-1}^{r+1} — coni invarianti di vertice O, generalmente in numero di $b-a$, i cui invarianti proiettivi forniscono altri invarianti di contatto di V_m e $\overline{V}_m$, dipendenti ancora dagli intorni di ordine $r+1$.

4. Se la suddetta omografia Θ è generale, e quindi possiede in Σ $b-a$ S_{b-1} uniti indipendenti, possiamo specializzare le coordinate introdotte nel n. 3 in guisa che questi S_{b-1} abbiano le equazioni

$$x_j = 0, \quad x_{b+1} = \ldots = x_n = 0 \qquad (j = a+1, \ldots, b).$$

Allora, se V_m si rappresenta colle (2)-(4) e similmente, con ovvio significato dei simboli, $\overline{V}_m$ ha le equazioni

$$(8)\quad x_i = \overline{f}_i(x_1, \dots, x_m), \quad x_j = \overline{\varphi}_j(x_1, \dots, x_m) + \dots, \quad x_l = \overline{g}_l(x_1, \dots, x_m),$$

dovrà risultare

$$(9)\qquad \varphi_j(x_1, \dots, x_m) = \gamma_j \overline{\varphi}_j(x_1, \dots, x_m) \qquad (j = a+1, \dots, b),$$

dove le γ sono $b - a$ costanti non nulle, i cui mutui rapporti danno i primi $b - a - 1$ invarianti di contatto di V_m e $\overline{V}_m$ definiti nel n. 3.

È subito visto che, se nessuno di questi rapporti è uguale ad 1, le forme invarianti di Φ sono le

$$(10)\qquad \varphi_{a+1}(x_1, \dots, x_m) = 0, \dots, \varphi_b(x_1, \dots, x_m) = 0,$$

sicchè gli altri invarianti di contatto sono gli invarianti proiettivi dell'insieme di forme (10).

5. Poniamoci ora nelle ipotesi del n. 2 e, com'è sempre possibile in un'infinità di modi, scegliamo uno spazio S_{n-m-k} che seghi S_{d_s} esattamente lungo un S_{d_s-m-s}, per $s = 1, 2, \dots, k$. È facile provare che, proiettando V_m e $\overline{V}_m$ da S_{n-m-k} su di un S_{m+k-1} generico, si ottengono due varietà V'_m, $\overline{V}'_m$ passanti semplicemente per la proiezione O' di O ed aventi in O' lo stesso spazio s–osculatore, il quale ha la dimensione $m + s - 1$ ($s = 1, 2, \dots, k$). Segando quindi V'_m, $\overline{V}'_m$ con un S_k generico di S_{m+k-1} passante per O', si hanno in S_k due curve contenenti O' semplicemente, ed aventi in questo punto gli stessi spazi osculatori di dimensione $1, 2, \dots, k$; dunque [2] queste curve posseggono in O' $k - 1$ invarianti proiettivi di contatto i_r, dipendenti dagli intorni di ordine $r + 1$ (per $r = 1, 2, \dots, k - 1$).

È ovvio che i_r dipende non solamente da V_m, $\overline{V}_m$, ma anche dai suddetti spazi S_{n-m-k}, S_k, sicchè in generale muterà al variare di questi. Tuttavia un semplice calcolo mostra che i_r risulta indipendente da S_{n-m-k}, S_k, se si suppone che il primo di tali spazi seghi $S_{d_{r+1}}$ in un $S_{d_{r+1}-m-r-1}$ situato in uno degli $S_{d_{r+1}-1}$ uniti dell'omografia Θ_r indotta, giusta il n. 3, da V_m, $\overline{V}_m$ nella stella Σ_r di centro S_{d_r} appartenente ad $S_{d_{r+1}}$. Per ogni fissato valore di $r = 1, 2, \dots, k - 1$, ed in corrispondenza ai $d_{r+1} - d_r$ $S_{d_{r+1}-1}$ uniti di Θ_r, si hanno così generalmente $d_{r+1} - d_r$ invarianti di contatto di V_m, $\overline{V}_m$; è facile vedere che i mutui rapporti di questi $d_{r+1} - d_r$ invarianti non differiscono dai $d_{r+1} - d_r - 1$ invarianti proiettivi di contatto definiti da Θ_r a norma del n. 3, mentre il loro prodotto uguaglia l'invariante I_r altrimenti ottenuto da B. SU [1].

6. Se valgono le ipotesi dei nn. 2, 4, talchè colle notazioni del n. 1 può assumersi $a = d_r$, $b = d_{r+1}$, e se si rappresentano V_m e $\bar{V}_m$ rispettivamente colle equazioni (2) - (4) e colle (8), in guisa che sussistano le (9), si verifica agevolmente che i $d_{r+1} - d_r$ invarianti di cui al n. 5 non sono che le $b - a$ costanti γ comparenti nelle (9), e ch' essi soddisfano l'uguaglianza $I_r = \gamma_{a+1}\gamma_{a+2} \cdots \gamma_b$ asserita alla fine del n. 5.

In base a ciò che precede, si ha ad esempio che *due superficie di* S_5 *che si tocchino semplicemente in un punto hanno ivi in generale sei invarianti proiettivi di contatto, determinati dagli intorni del* 2^o *ordine*; di più si vede subito che *tali intorni non ammettono altri invarianti indipendenti da quelli.* Più precisamente, con opportuna scelta delle coordinate non omogenee x, y, z, u, v, le equazioni delle due superficie possono generalmente ridursi nell'intorno dell' origine alla forma

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) + \ldots \\ y = \psi(u, v) + \ldots \\ z = \chi(u, v) + \ldots \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = \alpha\varphi(u, v) + \ldots \\ y = \beta\psi(u, v) + \ldots \\ z = \gamma\chi(u, v) + \ldots, \end{cases}$$

dove le α, β, γ sono costanti non nulle, le φ, ψ, χ sono forme binarie quadratiche nelle u, v, ed i puntini stanno per termini di grado superiore al secondo nelle u, v. Allora i sei invarianti sono le α, β, γ, ed i birapporti delle quaderne

$$\psi(u, v)\chi(u, v) = 0, \quad \chi(u, v)\varphi(u, v) = 0, \quad \varphi(u, v)\psi(u, v) = 0.$$