Bollettino
Unione Matematica Italiana

G. Sansone

Sull'approssimazione di funzioni continue con polinomi trigonometrici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **1** (1946), n.1, p. 39–42.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1946_3_1_1_39_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1946.

Sull' approssimazione di funzioni continue con polinomi trigonometrici.

Nota di G. SANSONE (a Firenze).

Sunto. - *Supposto che una funzione sia continua in* $(0, \pi)$ *con le sue derivate fino ad un certo ordine, si stabiliscono formule di approssimazione mediante polinomi trigonometrici*

a) È noto il teorema di JACKSON: *se* f(x) *è una funzione periodica, di periodo* 2π, *la quale ammette ovunque derivata di ordine* p *continua, se* $\omega_p(\delta)$ *è il modulo di continuità di* $f^{(p)}(x)$, *allora ad ogni intero positivo* n *può associarsi un polinomio trigonometrico* $T_n(x)$ *di ordine* n *tale che per qualunque valore di* x *risulta*

$$\left|f(x) - T_n(x)\right| < K^p\left[\frac{K}{2\pi} + 4\right]\omega_p\left(\frac{2\pi}{n}\right)\frac{1}{n^p}, \tag{I}$$

dove K *è una costante assoluta.* $[K < \pi^7/2^5]$ (¹).

Ove si assegni la $f(x)$ soltanto nell'intervallo $(0, \pi)$, la quale possieda ivi derivate continue fino all'ordine p, $p \geq 1$, estremi inclusi, non può applicarsi in generale la (I) perchè ove si effettui il prolungamento di $f(x)$ con la legge

$$\varphi(x) = f(x) \text{ per } 0 \leq x \leq \pi, \quad \varphi(-x) = f(x) \text{ per } -\pi \leq x \leq 0;$$
$$\varphi(x + 2l\pi) = \varphi(x), \quad (l = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

la $\varphi(x)$ risulta periodica, di periodo 2π, continua, ma in generale i punti $x = k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ possono risultare punti di discontinuità di prima specie per le devivate di $\varphi(x)$ di ordine dispari, e ove si effettui il prolungamento

$$\varphi(x) = f(x) \text{ per } 0 \leq x \leq \pi, \quad \varphi(-x) = -f(x) + 2f(0) \text{ per } -\pi \leq x \leq 0;$$
$$\varphi(x + 2l\pi) = \varphi(x), \quad (l = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

(¹) Cfr. D. JACKSON: *The theory of approximation.* « Am. Math. Coll. », XI (New-York, 1930), p. 12.

la $\varphi(x)$ risulta periodica, di periodo 2π, ma essa può presentare una discontinuità di prima specie nei punti $x=(2k+1)\pi$, $(k=0, \pm 1, \pm 2,...)$, mentre le sue derivate di ordine pari possono presentare una discontinuità di prima specie nei punti $x=k\pi$, $(k=0, \pm 1, \pm 2,...)$.

Nell' uno e nell' altro caso, senza particolari accorgimenti, non può usarsi la formula (I), e giova ai fini delle applicazioni mettere in evidenza, due semplici modificazioni della (I), rispettivamente nell' ipotesi che $f(x)$ abbia in $(0, \pi)$ derivate continue fino all'ordine $2p$, o all' ordine $2p-1$.

b) *Sia* f(x) *una funzione continua in* $(0, \pi)$ *che abbia ivi derivate continue fino all'ordine* 2p, $(p \geq 1$, *e sia* $\omega_{2p}(\delta)$ *il modulo di continuità di* $f^{(2p)}(x)$. *Allora ad ogni intero positivo* $n \geq 2p$ *può associarsi un polinomio trigonometrico* $T_n(x)$ *di ordine* n *tale che per* $0 \leq x \leq \pi$ *risulti*

$$(\mathrm{II}_1) \qquad |f(x)-T_n(x)| \leq K^{2p}\left(\frac{K}{2\pi}+4\right)\left[\omega_{2p}\left(\frac{2\pi}{n}\right)+ \right.$$
$$\left. + M_{2p}\sum_{k=1}^{p} \left\{|f^{(2k-1)}(0)|+|f^{(2k-1)}(\pi)|\right\}\frac{2\pi}{n}\right]\frac{1}{n^{2p}},$$

dove K *è la costante assoluta che figura nella* (I), *ed* M_{2p} *una costante dipendente unicamente da* p.

Consideriamo infatti la funzione

$$(1) \qquad \varphi(x)=f(x)-\sum_{s=1}^{2p} b_s \operatorname{sen} sx, \qquad (0 \leq x \leq \pi),$$

e proviamo che possono determinarsi le costanti $b_1, b_2, ..., b_{2p}$ in guisa che risulti

$$(2) \quad \varphi'(0)=\varphi^{(3)}(0)=...=\varphi^{(2p-1)}(0)=0; \quad \varphi'(\pi)=\varphi^{(3)}(\pi)=...=\varphi^{(2p-1)}(\pi)=0.$$

Avendosi

$$\varphi^{(2k+1)}(x)=f^{(2k+1)}(x)-(-1)^k\sum_{s=1}^{2p} s^{2k+1} b_s \cos sx,$$

per le (2) dovrà aversi

$$\sum_{s=1}^{2p} s^{2k+1} b_s=(-1)^k f^{(2k+1)}(0), \quad \sum_{s=1}^{2p}(-1)^{s-1} s^{2k+1} b_s=(-1)^{k-1} f^{(2k+1)}(\pi),$$

e perciò sommando e sottraendo

$$(3_1) \quad 1^{2k+1}b_1+3^{2k+1}b_3+...+(2p-1)^{2k+1}b_{2p-1}=(-1)^k\frac{f^{(2k+1)}(0)-f^{(2k+1)}(\pi)}{2},$$

$$(3_2) \quad 2^{2k+1}b_2+4^{2k+1}b_4+...+(2p)^{2k+1}b_{2p}=(-1)^k\frac{f^{(2k+1)}(0)+f^{(2k+1)}(\pi)}{2},$$
$$(k=0, 1, ..., p-1).$$

Se indichiamo con $2m_{2p}$ il massimo valore assoluto degli elementi appartenenti ai determinanti reciproci dei due determinanti non nulli

$$\begin{vmatrix} 1, & 3, \ldots, & 2p-1 \\ 1^3, & 3^3, \ldots, & (2p-1)^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1^{2p-1}, & 3^{2p-1}, \ldots, & (2p-1)^{2p-1} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2, & 4, \ldots, & 2p \\ 2^3, & 4^3, \ldots, & (2p)^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 2^{2p-1}, & 4^{2p-1}, \ldots, & (2p)^{2p-1} \end{vmatrix}$$

si ricava per le b_s la limitazione

(4) $$|b_s| \leq m_{2p} \sum_{k=1}^{p} \{ |f^{(2k-1)}(0)| + |f^{(2k+1)}(\pi)| \}.$$

Se effettuiamo ora il prolungamento della $\varphi(x)$ data dalla (1) colla seguente legge

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \quad -\pi \leq x \leq 0; \quad \varphi(x + 2l\pi) = \varphi(x), \quad (l = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

la $\varphi(x)$, a motivo anche delle (2) risulta continua in qualunque punto x insieme alle sue derivate fino all'ordine $2p$, e poichè si ha

$$\varphi^{(2p)}(x) = f^{(2p)}(x) - (-1)^p \sum_{s=1}^{2p} s^{2p} b_s \operatorname{sen} sx,$$

se $\omega_{2p}^*(x)$ è il modulo di continuità di $\varphi^{(2p)}(x)$, otteniamo

$$\omega_{2p}^*(\delta) = \omega_{2p}(\delta) + \delta m_{2p} \sum_{k=1}^{p} \{ |f^{(2k-1)}(0)| + |f^{(2k-1)}(\pi)| \} \sum_{s=1}^{2p} s^{2p+1}.$$

Posto allora

$$M_{2p} = m_{2p} \sum_{s=1}^{2p} s^{2p+1},$$

M_{2p} *è una costante dipendente unicamente da* p, e applicando la (I) alla funzione pari $\varphi(x)$ abbiamo che esiste un polinomio

$$t_n(x) = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l \cos lx$$

di soli coseni tale che qualunque sia x risulta

$$|\varphi(x) - t_n(x)| <$$
$$< K^{2p} \left[\frac{K}{2\pi} + 4\right] \left[\omega_{2p}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + M_{2p} \sum_{k=1}^{p} \{ |f^{(2k-1)}(0)| + |f^{(2k-1)}(\pi)| \} \frac{2\pi}{n}\right] \frac{1}{n^{2p}},$$

dalla quale, posto

(5₁) $$T_n(x) = \sum_{s=1}^{2p} b_s \operatorname{sen} sx + \sum_{l=0}^{n} \alpha_l \cos lx,$$

si ottiene per $0 \leq x \leq \pi$ la (II_1).

Notiamo che nella espressione (5_1) del polinomio $T_n(x)$ la prima somma $\sum_{s=1}^{2p} b_s \operatorname{sen} sx$ contiene $2p$ termini i cui coefficienti per le (3_1), (3_2) risultano unicamente dipendenti dai valori $f'(0)$, $f'^{(3)}(0), \ldots, f^{(2p-1)}(0)$, $f'(\pi)$, $f^{(3)}(\pi), \ldots, f^{(2p-1)}(\pi)$, e indipendenti da n.

c) Con lo stesso procedimento di *b*) si ottiene che *se* $\mathrm{f(x)}$ *è una funzione continua in* $(0, \pi)$, *che abbia ivi derivate continue fino all'ordine* $2\mathrm{p} - 1$, $(\mathrm{p} \geq 1)$, *e se* $\omega_{2p-1}(\delta)$ *è il modulo di continuità di* $\mathrm{f}^{(2\mathrm{p}-1)}(\mathrm{x})$, *allora ad ogni intero positivo* $\mathrm{n} \geq 2\mathrm{p} - 1$ *può associarsi un polinomio trigonometrico di ordine* n,

$$(5_2) \qquad T_n(x) = \sum_{s=0}^{2p-1} a_s \cos sx + \sum_{l=1}^{n} \beta_l \operatorname{sen} lx$$

tale che per $0 \leq \mathrm{x} \leq \pi$ *risulti*

$$(\mathrm{II}_2) \qquad |f(x) - T_n(x)| \leq$$
$$\leq 2K^{2p-1}\left(\frac{K}{2\pi} + 4\right)\left[\omega_{2p-1}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + M_{2p-1}\sum_{k=0}^{p-1}\left\{|f^{(2k)}(0)| + |f^{(2k)}(\pi)|\right\}\frac{\pi}{n}\right]\frac{1}{n^{2p-1}},$$

dove K *è la costante assoluta che figura nella* (I), *ed* $\mathrm{M}_{2\mathrm{p}-1}$ *una costante dipendente unicamente da* p.

Analogamente alla (5_1), anche nella (5_2) i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_{2p-1}$ della prima somma dipendono unicamente dai valori $f(0)$, $f''(0), \ldots, f^{(2p-2)}(0)$, $f(\pi)$, $f''(\pi), \ldots, f^{(2p-2)}(\pi)$ e sono indipendenti da n.