BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

E. Bompiani

Piccoli contributi alla teoria gaussiana delle superficie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **1** (1946), n.1, p. 35–39.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1946_3_1_1_35_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1946.

Piccoli contributi alla teoria gaussiana delle superficie.

Nota di E. BOMPIANI (a Roma).

Sunto. - *Si prova che le relazioni di* MAINARDI-CODAZZI, *come la relazione di* GAUSS, *sono atte a definire la curvatura della superficie; si dà inoltre un'estensione del teorema di* BELTRAMI-ENNEPER *alle curve tangenti alle asintotiche.*

1. Significato geometrico delle relazioni di Mainardi-Codazzi. — È ben noto che due forme quadratiche differenziali binarie, $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ non possono in generale considerarsi come prima e seconda forma (nel senso di GAUSS) di una superficie (dell'ordinario spazio euclideo). Ridotte le due forme a forma ortogonale ($F = M = 0$) e posto

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{L}{E}, \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{N}{G}$$

condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una superficie con quelle forme è che valgano le relazioni di GAUSS e di MAINARDI–CODAZZI [1]

$$(1.1)\quad K=\frac{1}{R_1R_2}=\frac{LN}{EG}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\}$$

$$(1.2)\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{R_1}\right)=\frac{1}{R_2}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v},\quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{R_2}\right)=\frac{1}{R_1}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}.$$

Soddisfatte queste, le linee $u(dv=0)$ e $v(du=0)$ sono di curvatura per la superficie e R_1, R_2 sono i rispettivi raggi di curvatura in un punto (u, v) di essa.

Il significato geometrico della prima relazione è il « theorema egregium » di GAUSS (invariànza della curvatura gaussiana K per deformazioni isometriche).

Delle relazioni di MAINARDI–CODAZZI (1.2) non mi consta che si conosca un significato geometrico: mentre anch'esse danno due espressioni della stessa curvatura gaussiana mediante elementi che non figurano nella prima interpretazione di essa.

La prima delle (1.2) può scriversi pure

$$K=\frac{1}{R_1}\frac{\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\sqrt{E}}{R_1}\right)}{\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}}$$

e può interpretarsi nel modo seguente.

Si consideri una *maglia* formata con linee di curvatura avente un vertice in $O(u, v)$ e i vertici contigui ad esso in $O_u(u+du, v)$ e in $O_v(u, v+dv)$.

Il lato della maglia OO_u ha lunghezza $ds_1=\sqrt{E}du$ e il lato opposto ad esso ne differisce per $\delta_2 ds=\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}dudv$.

Le normali alla superficie in O e in O_u (che s'incontrano nel centro di curvatura a distanza R_1 da O) formano un angolo

$$d\alpha_1=\frac{\sqrt{E}}{R_1}du=\frac{ds_1}{R_1}$$

e la variazione di questo passando al lato opposto della maglia è data da $\delta_2 d\alpha_1=\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\sqrt{E}}{R_1}\right)dudv$.

[1] Cfr. p. es.: L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale*, 3ª ediz., vol. 1°, p. 416 (con lo scambio degli indici 1 e 2).

La prima relazione di MAINARDI-CODAZZI è dunque

$$K = \frac{1}{R_1} \frac{\delta_2 d\alpha_1}{\delta_2 ds_1}$$

ove tutto è espresso per mezzo di elementi geometrici; analogamente per la seconda.

2. **Invarianti per deformazioni isometriche conservanti le linee di curvatura.** — Si considerino i piani π_1 e π_2 contenenti la normale in O alla superficie e rispettivamente i lati OO_u e OO_v della maglia (cioè i piani della normale in O e delle tangenti alle linee di curvatura). S'indichi con $d_1\theta_1$ l'angolo di π_1 con l'analogo piano relativo ad O_u.

Tenute presenti le relazioni fra le coordinate cartesiane dei punti della superficie e i coefficienti delle forme fondamentali, e le relazioni di RODRIGUEZ per le derivate dei coseni direttori della normale si calcola senza difficoltà concettuali

$$\left(\frac{d_1\theta_1}{ds_1}\right)^2 = \frac{2}{R_1^2} + \frac{1}{G}\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}.$$

S'indichi invece con $d_1\theta_2$ l'angolo di π_2 con l'analogo piano relativo ad O_u. In modo del tutto simile a quello accennato si ha

$$\left(\frac{d_1\theta_2}{ds_1}\right)^2 = \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{G}\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}.$$

E perciò

$$\left(\frac{d_1\theta_1}{ds_1}\right)^2 - \left(\frac{d_1\theta_2}{ds_1}\right)^2 = \frac{1}{R_1^2}, \quad 2\left(\frac{d_1\theta_2}{ds_1}\right)^2 - \left(\frac{d_1\theta_1}{ds_1}\right)^2 = \frac{1}{G}\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}.$$

La prima dà un nuovo significato dei raggi di curvatura (e quindi anche della curvatura gaussiana); la seconda mostra che *in una deformazione per applicabilità che conservi le linee di curvatura sono invarianti la grandezza* $2\left(\frac{d_1\theta_2}{ds_1}\right)^2 - \left(\frac{d_1\theta_1}{ds_1}\right)^2$ *e l'analoga (scambiando* 1 *in* 2*).*

3. **Una estensione del teorema di Beltrami-Enneper.** — È noto che dato un $ds^2 \equiv Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ e una linea (rigida) esiste una superficie con quel ds^2 e contenente la linea a meno che questa sia un'asintotica della superficie (nel qual caso esistono infinite superficie in quelle condizioni). Questo teorema implica che gli elementi determinanti un' asintotica, cioè la flessione e la torsione di essa, dipendano soltanto dal ds^2.

Per la flessione è evidente perchè, essendo il piano osculatore alla asintotica coincidente col piano tangente, la flessione dell'asintotica è uguale alla sua curvatura geodetica (dipendente dal solo ds^2); e per la torsione risulta dal teorema di BELTRAMI–ENNEPER [1].

Ma quest'ultimo non è che caso particolare di un teorema più generale che lega flessione e torsione di una curva della superficie in un punto in cui essa sia tangente ad una asintotica.

Per avere questa relazione nel modo più rapido rappresentiamo la superficie nell'intorno di un suo punto O con l'equazione (in coordinate cartesiane ortogonali)

$$z = 2c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{30}x^3 + \ldots .$$

La torsione di un elemento di curva $y = \alpha x^2 + \beta x^3 + \ldots$ tangente ad $y = 0$ (tangente asintotica) si calcola elementarmente e vale

$$\frac{1}{T} = \frac{3(2c_{11}\alpha + c_{30})}{\alpha}$$

mentre la sua flessione è $1/\rho = 2\alpha$. Inoltre la curvatura gaussiana vale $K = -4c_{11}^2$ e la flessione dell'asintotica tangente a $y = 0$ vale $1/\rho_a = -\dfrac{3}{2}c_{30}/c_{11}$.

Sicchè in termini geometrici (indipendenti dal riferimento adottato) la relazione precedente si scrive

$$\frac{1}{T} = 3\sqrt{-K}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{\rho}{\rho_a}\right)$$

e su di essa si leggono i teoremi seguenti:

La torsione di una curva di una superficie in un punto in cui sia tangente ad una tangente asintotica dipende unicamente dall'elemento E_2 *(del 2° ordine) della curva nel punto (e non dall'* E_3*), cioè dalla sua flessione. Torsione e flessione, al variare di* E_2*, sono legate da una relazione proiettiva.*

La torsione di qualsiasi curva che abbia contatto del 2° ordine con un'asintotica ($\rho = \rho_a$) *vale* $1/T = \sqrt{-K}$ (il teorema di BELTRAMI–ENNEPER si ha nel caso più particolare che l'E_3 di curva sia proprio quello di asintotica; ma ciò non è necessario).

In ogni deformazione isometrica della superficie che lasci inal-

[1] L. BIANCHI, l. c., p. 204.

terata una tangente asintotica è invariante l'espressione

$$\frac{\dfrac{1}{\rho_1 T_1} - \dfrac{1}{\rho_2 T_2}}{\dfrac{1}{\rho_1} - \dfrac{1}{\rho_2}} = 3\sqrt{-K}$$

relativa a due E_3, *con quella tangente asintotica, caratterizzati da* (ρ_1, T_1) *e da* (ρ_2, T_2).