
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIO MANARINI

Sul moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **17** (1938), n.4, p. 240–244.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_4_240_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_4_240_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_4_240_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sul moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico.

Nota di MARIO MANARINI (a Bologna)

Sunto. - *Nel problema enunciato nel titolo la massa maupertuisiana si mantiene costante durante il moto; perciò i risultati della meccanica classica si conservano qualitativamente nella relativistica. La Nota riottiene inoltre in modo diretto e rapido un'integrale primo delle equazioni del moto trovato da C. AGOSTINELLI.*

È noto l'interesse del problema riguardante il moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico per la teoria delle aurore polari e più generalmente per la teoria delle radiazioni cosmiche.

Il prof. ARMELLINI ha di recente richiamato magistralmente l'attenzione a tale problema in un articolo sulle aurore boreali pubblicato in « *Scienza e tecnica* », rivista generale d'informazione scientifica della *Società Italiana per il Progresso delle Scienze*, vol. II, fasc. III, pp. 93-97, e ultimamente sono stati pubblicati lavori di C. AGOSTINELLI ⁽¹⁾ e L. GIALANELLA ⁽²⁾.

Riferendomi specialmente al problema riguardante l'emissione elettronica proveniente dalle cavità solari (*effetto Evershed* ed *effetto Hale*) e successivamente il moto di un elettrone sotto l'azione del dipolo magnetico costituito dalla terra, credo opportuno far rientrare il problema nell'ambito della meccanica relativistica. Sotto tale aspetto si può stabilire immediatamente che, anche considerando per il corpuscolo la massa maupertuisiana, il moto avviene

⁽¹⁾ Cfr. « *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino* », vol. 73, 1937-38-XVI.

⁽²⁾ Cfr. « *Rend. Acc. dei Lincei* », vol. XXVIII, 1938, pp. 14-22.

con velocità di modulo costante. Ed anzi tale proprietà continua a valere, più in generale, per una massa supposta funzione crescente del quadrato della velocità quando la forza applicata, come nel caso particolare che a noi interessa, è costantemente perpendicolare alla velocità. Conseguo che la massa del corpuscolo rimane costante e l'equazione differenziale del moto è formalmente ricondotta a quella della meccanica newtoniana. Pertanto anche sotto l'aspetto relativistico continuano a valere i risultati ottenuti dagli autori citati, salvo la sostituzione della costante m (massa) con

$$\text{l'altra } \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Data l'attualità della questione, credo utile riprendere il lavoro dell'AGOSTINELLI sia per mettermi nel punto di vista relativistico, sia per ottenere il risultato in modo più rapido e diretto evitando i calcoli laboriosi richiesti dall'uso delle coordinate ellittiche.

Consideriamo l'equazione in forma relativistica del moto del corpuscolo P di massa m allo stato di riposo e carica elettrica e :

$$(1) \quad m \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = ev \wedge H \quad (1),$$

dove $v = \frac{dP}{dt}$ è la velocità, H il campo magnetico dovuto al dipolo $(O_1 O_2)$, $m \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ la massa maupertuisiana, funzione crescente di v^2 .

Moltiplicando scalarmente per v , l'equazione che risulta può scriversi nella forma

$$\frac{d}{dt} \left(v \times \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right) - \frac{dv}{dt} \times \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} = 0,$$

e con facili calcoli si perviene alla relazione

$$(2) \quad \frac{dv^2}{dt^2} = 0, \quad \text{ossia } v^2 = \text{cost.}$$

Così si può affermare che il moto di P è uniforme sulla sua traiettoria e la massa maupertuisiana del corpuscolo è costante ⁽²⁾.

(¹) Cfr. ad es. R. MARCOLONGO, *Relatività*, 2^a edizione, pag. 99, Principato, Messina, 1923; e più particolarmente M. von LAUE, *La Théorie de la Relativité*, tome I, pag. 234, Gauthier-Villars, Paris.

(²) Si può osservare che la proprietà dimostrata, $v^2 = \text{cost.}$, continua a valere, più in generale, nel caso che si tratti di massa funzione crescente

Quindi l'equazione (1) può mettersi nella stessa forma della meccanica newtoniana

$$(1') \quad \frac{dv}{dt} = f \cdot v \wedge H, \quad \left[f = \frac{e}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right].$$

Se r_1 ed r_2 sono le distanze di P da O_1 e da O_2 , il potenziale magnetico è dato da

$$\varphi = k \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

cosicchè per la forza magnetica si ha l'espressione

$$H = \text{grad } \varphi = k \left(\frac{1}{r_2^2} \text{grad } r_2 - \frac{1}{r_1^2} \text{grad } r_1 \right).$$

Convien manifestamente determinare la posizione di P con le sue coordinate cartesiane nel piano PO_1O_2 (prendendo l'origine nel punto medio del dipolo O_1O_2 , la retta O_1O_2 come asse x) e con l'angolo ω che il piano PO_1O_2 forma con un piano fisso per l'asse O_1O_2 . Però per il seguito basterà limitarci a considerare ω e la distanza y di P della retta O_1O_2 .

Consideriamo nel piano PO_1O_2 le *linee di forza magnetica*, cioè le traiettorie ortogonali delle linee equipotenziali $\varphi = \text{cost.}$ espresse in coordinate bipolari, da

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \text{cost.}$$

Posto

$$P\widehat{O_1O_2} = \alpha, \quad P\widehat{O_2O_1} = \beta,$$

risulta

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha},$$

onde si può porre

$$(3) \quad \frac{1}{r_1} = h \sin \alpha, \quad \frac{1}{r_2} = h \sin \beta.$$

Se i è l'operatore che fa ruotare di $\frac{\pi}{2}$ i vettori del piano PO_1O_2 ,

di v^2 e la forza agente sia perpendicolare alla traiettoria. L'equazione del moto occorre prenderla nella forma

$$\frac{d}{dt} m v = f,$$

come è logico fare nel caso di massa variabile. Con facile calcolo se ne deduce infatti la conseguenza

$$\frac{dv^2}{dt} \left(\frac{1}{2} m + v^2 \frac{dm}{dv^2} \right) = 0 \quad \text{e quindi} \quad v^2 = \text{cost.}$$

si ha, per le (3),

$$i \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = -h \left(\frac{i \operatorname{grad} r_1}{r_1} \sin \alpha - \frac{i \operatorname{grad} r_2}{r_2} \sin \beta \right),$$

e, per essere

$$\operatorname{grad} \alpha = \frac{1}{r_1} i \operatorname{grad} r_1, \quad \operatorname{grad} \beta = \frac{1}{r_2} i \operatorname{grad} r_2,$$

risulta subito

$$i \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = h \operatorname{grad} (\cos \alpha - \cos \beta).$$

Questa relazione, manifestamente, definisce le traiettorie ortogonali delle linee equipotenziali nel piano PO_1O_2 , che risultano date da

$$\psi = \cos \alpha - \cos \beta = \text{cost.},$$

dove α e β sono le coordinate biangolari di P rispetto ai poli O_1, O_2 .

D'altra parte poichè si ha

$$\operatorname{grad} \omega = \frac{1}{y} n,$$

dove n è il versore normale al piano PO_1O_2 nel senso di ω crescente, i tre vettori in P , $\operatorname{grad} \varphi$, $\operatorname{grad} \psi$ e $\operatorname{grad} \omega$ costituiscono una terna ortogonale. Allora calcolando $\operatorname{grad} \psi \wedge \operatorname{grad} \omega$, tenendo conto delle relazioni precedenti, si ottiene facilmente

$$\operatorname{grad} \varphi = k \operatorname{grad} \psi \wedge \operatorname{grad} \omega.$$

Sostituendo nell'equazione del moto (1) ove si faccia $H = \operatorname{grad} \varphi$, sviluppando il doppio prodotto vettoriale con la ben nota formula

$$(a \wedge b) \wedge c = (a \times c)b - (b \times c)a,$$

ed osservando che è

$$\operatorname{grad} \omega \times v = \dot{\omega}, \quad \operatorname{grad} \psi \times v = \dot{\psi},$$

ove i punti indicano le derivate rispetto al tempo, si perviene all'equazione

$$\frac{dv}{dt} = \mu(\omega \operatorname{grad} \psi - \dot{\psi} \operatorname{grad} \omega), \quad \left(\mu = \frac{ek}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right).$$

Considerando il punto P funzione dei parametri ortogonali φ, ψ, ω si ricavano le equazioni scalari equivalenti alla (1):

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt} \times \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{dv}{dt} \times \frac{\partial P}{\partial \psi} = \mu \dot{\omega}, \\ \frac{dv}{dt} \times \frac{\partial P}{\partial \omega} = -\mu \dot{\psi}, \end{cases}$$

giacchè si ha subito

$$\text{grad } \varphi \times \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 1, \quad \text{grad } \varphi \times \frac{\partial P}{\partial \psi} = 0, \quad \text{grad } \varphi \times \frac{\partial P}{\partial \omega} = 0.$$

Si ricava un integrale primo osservando che la terza delle (4) si può scrivere

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \left(v \times \frac{\partial P}{\partial \omega} \right) = \mu \dot{\psi}.$$

Infatti si ha

$$\frac{d}{dt} \left(v \times \frac{\partial P}{\partial \omega} \right) = \frac{dv}{dt} \times \frac{\partial P}{\partial \omega} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} v^2.$$

D'altra parte risulta

$$(6) \quad v^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \varphi} \right)^2 \dot{\varphi}^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial \psi} \right)^2 \dot{\psi}^2 + y^2 \omega^2,$$

ove si è tenuto conto che è

$$(7) \quad \frac{\partial P}{\partial \omega} = y n.$$

Osservando che ψ e φ nel piano PO_1O_2 dipendono soltanto dal campo magnetico H , non saranno dipendenti da ω i vettori $\frac{\partial P}{\partial \varphi}$ e $\frac{\partial P}{\partial \psi}$ del piano PO_1O_2 , onde dalla (6) deduciamo che è

$$\frac{\partial v^2}{\partial \omega} = 0,$$

e così risulta

$$\frac{dv}{dt} \times \frac{\partial P}{\partial \omega} = \frac{d}{dt} \left(v \times \frac{\partial P}{\partial \omega} \right),$$

ciò che giustifica la (5).

Giacchè per la (7) risulta subito

$$v \times \frac{\partial P}{\partial \omega} = \dot{\omega} y^2,$$

da (5) si ricava l'integrale primo

$$(8) \quad \dot{\omega} y^2 + \mu \psi = c, \quad (c = \text{cost.})$$

che, salvo il valore delle costanti, coincide con l'integrale primo determinato dall'AGOSTINELLI nell'ambito della meccanica newtoniana, come si verifica subito osservando che qui si è preso ψ con dimensione nulla mentre dall'AGOSTINELLI ψ è preso con la dimensione di una lunghezza.