
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

TOMMASO BOGGIO

Sul moto di un corpuscolo elettrizzato in un campo elettrico e in un campo magnetico sovrapposti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **17** (1938), n.4, p. 234–240.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_4_234_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_4_234_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_4_234_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Sul moto di un corpuscolo elettrizzato in un campo elettrico
e in un campo magnetico sovrapposti.**

Nota di TOMMASO BOGGIO (a Torino).

Sunto. - Viene stabilito, con un procedimento fondato sulle equazioni dinamiche di LAGRANGE, un integrale delle equazioni del moto di un corpuscolo elettrizzato, soggetto all'azione di un campo elettrico e di un campo magnetico sovrapposti.

In una Nota recente ⁽¹⁾, in corso di stampa nei « Comptes Rendus », ho considerato il moto di una particella elettrizzata,

⁽¹⁾ BOGGIO, *Sur le mouvement d'une particule électrisée dans un champ électrique et dans un champ magnétique superposés* (« Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris », 1938).

soggetta all'azione di un campo elettrico e di un campo magnetico sovrapposti, ed ho mostrato che, se questi due campi sono simmetrici rispetto ad un asse, sussiste un integrale primo dell'equazione del movimento, analogo al noto integrale delle aree rispetto a un piano normale a tale asse.

Qui, riprendendo la questione da un tutt'altro punto di vista, faccio vedere che l'integrale ora accennato può anche dedursi (confermando una previsione gentilmente comunicatami dal prof. LEVI-CIVITA) dalle equazioni del movimento sotto la seconda forma di LAGRANGE, le quali sono già state stabilite dal prof. LEVI-CIVITA sin dal 1911 ⁽²⁾, ma che pare non siano state finora utilizzate.

All'uopo basta formare la cosiddetta funzione di LAGRANGE L , giacchè se in essa v'ha qualche coordinata ignorata, ne segue subito, com'è notissimo, un corrispondente integrale delle equazioni del movimento.

La funzione di LAGRANGE può essere facilmente ottenuta, come ha mostrato il prof. LEVI-CIVITA, ricorrendo al principio di HAMILTON, che è applicabile anche quando le forze dipendono dalla velocità, come appunto avviene nel caso attuale.

1. Assumiamo l'equazione del movimento della particella elettrizzata P sotto la forma:

$$(1) \quad mP'' = -\text{grad } V + F \wedge P',$$

ove gli apici indicano derivate rispetto al tempo t , m è una costante, V la funzione potenziale del campo elettrico, ed F il vettore che rappresenta la forza magnetica, il quale deve soddisfare alla condizione:

$$(2) \quad \text{div } F = 0.$$

Se si dà al punto P lo spostamento virtuale, infinitesimo, arbitrario δP , il lavoro virtuale fatto dalla forza complessiva che figura nel secondo membro della (1) è:

$$(3) \quad -\delta V + F \wedge dP \times \delta P/dt,$$

ma, a causa della (2), si può porre (e in infiniti modi):

$$(4) \quad F = \text{rot } f,$$

⁽²⁾ LEVI-CIVITA, *Sur les équations générales du mouvement d'un corpuscule dans un champ magnétique et un champ électrique superposés* (« Archiv vor Mathematik og Naturvidenskab ». B. XXXI, a. 1911).

ove f è un vettore, e allora, da una formula nota ⁽³⁾, si ha:

$$F \wedge dP \times \delta P = \text{rot } f \times dP \wedge \delta P = d(f \times \delta P) - \delta(f \times dP);$$

perciò l'espressione (3) diventa:

$$-\delta V + [d(f \times \delta P) - \delta(f \times dP)]/dt.$$

Applicando il principio di HAMILTON, che riassume le equazioni del movimento, per un intervallo di tempo qualunque $t_0 \rightarrow t_1$, si ha:

$$\int_{t_0}^{t_1} [-\delta V dt + d(f \times \delta P) - \delta(f \times dP) + \delta T dt] = 0,$$

ove $T = mP'^2/2$ è la forza viva; ma siccome lo spostamento virtuale δP è soggetto alla condizione di annullarsi per $t = t_0$ e $t = t_1$, ne segue:

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta(T - V) - \delta(f \times P')] dt = 0,$$

ossia:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V - f \times P') dt = 0,$$

od anche:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0, \text{ avendo posto: } L = T - V - f \times P',$$

cioè:

$$L = mP'^2/2 - V - f \times P'.$$

Questa è la funzione di LAGRANGE, che concorda con quella data dal prof. LEVI-CIVITA.

2. Ciò premesso, se diciamo u, φ, z le coordinate cilindriche del punto P , si ha:

$$P = O + ue^{i\varphi} I + zK,$$

essendo O un punto fisso, I, J, K i soliti vettori unitari ortogonali di riferimento, ed i il rotore di un angolo retto nel piano OIJ . Ne segue:

$$P' = u'e^{i\varphi} I + u\varphi'ie^{i\varphi} I + z'K, \quad P'^2 = u'^2 + u^2\varphi'^2 + z'^2;$$

(3) BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Elementi di Calcolo vettoriale*, 2^a ediz., pag. 86 (Zanichelli; Bologna, a. 1920).

se f_1, f_2, f_3 sono le componenti cilindriche del vettore f , si può porre:

$$(5) \quad f = f_1 e^{i\varphi} I + f_2 i e^{i\varphi} I + f_3 K,$$

perciò:

$$(6) \quad L = m(u'^2 + u^2 \varphi'^2 + z'^2)/2 - V - f_1 u' - f_2 u \varphi' - f_3 z'.$$

Se ora facciamo l'ipotesi che le funzioni V, f_1, f_2, f_3 non dipendano da φ , vuol dire che la φ è una coordinata ignorata, e perciò sussiste l'integrale $\partial L / \partial \varphi' = \text{cost.}$, cioè:

$$(7) \quad m u^2 \varphi' - u f_2 = \text{cost.}$$

Supposto inoltre che il vettore F della forza magnetica derivi dal potenziale U , cioè $F = \text{grad } U$, si dovrà avere, per la (4):

$$(4') \quad \text{rot } f = \text{grad } U.$$

Facciamo ancora l'ipotesi che la funzione U sia indipendente da φ , e allora avremo dalla (4'):

$$(4'') \quad \text{rot } f = \frac{\partial U}{\partial u} \text{grad } u + \frac{\partial U}{\partial z} \text{grad } z;$$

in questo caso il campo elettrico e quello magnetico sono *simmetrici rispetto all'asse Oz*.

Determiniamo ora un vettore f che verifichi la (4''); supponiamo, nella (5), $f_1 = f_3 = 0$, e inoltre $f_2 = f(u, z)$, e potremo con ciò scrivere, osservando che $\text{grad } u = e^{i\varphi} I$:

$$f = f(u, z) i \text{grad } u = f(u, z) K \wedge \text{grad } u;$$

ne segue:

$$\text{rot } f = \text{rot } (K \wedge f \text{grad } u).$$

Ma è facile vedere che, per un vettore qualunque v , si ha:

$$(8) \quad \text{rot } (K \wedge v) = (\text{div } v) K - \frac{\partial v}{\partial z}$$

perciò:

$$\begin{aligned} \text{rot } f &= \text{div } (f \text{grad } u) \cdot K - \frac{\partial f}{\partial z} \text{grad } u = \\ &= (f \text{div grad } u + \text{grad } f \times \text{grad } u) K - \frac{\partial f}{\partial z} \text{grad } u = \\ &= \left(\frac{1}{u} f + \frac{\partial f}{\partial u} \right) K - \frac{\partial f}{\partial z} \text{grad } u; \end{aligned}$$

combinando colla (4''), ove è da notare che $\text{grad } z = K$, si deduce:

$$\frac{1}{u} f + \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = - \frac{\partial U}{\partial u},$$

ossia:

$$(9) \quad \frac{\partial(uf)}{\partial u} = u \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \frac{\partial(uf)}{\partial z} = -u \frac{\partial U}{\partial u}.$$

D'altra parte, se diciamo U_1 la funzione associata di U (la quale, come ho dimostrato altrove ⁽⁴⁾, è biarmonica nello spazio esterno alle masse), si ha:

$$\frac{\partial U_1}{\partial u} = -u \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial z} = u \frac{\partial U}{\partial u},$$

perciò le (9) mostrano che si può assumere $uf = -U_1$, nel qual caso l'integrale (7) assume la forma:

$$mu^2\varphi' + U_1 = \text{cost.},$$

che concorda con quella data nella mia Nota citata in principio.

3. Come altro caso particolare, supponiamo che le funzioni V , f_1 , f_2 , f_3 , che figurano nella (6) siano indipendenti da z ; esse dipenderanno perciò soltanto da u e φ , o, meglio ancora, dalle coordinate cartesiane x , y . Sussisterà allora l'integrale $\partial L / \partial z' = \text{cost.}$, cioè:

$$(10) \quad mz' - f_3 = \text{cost.}$$

Supposto poi che il vettore F derivi dal potenziale U , sussisterà la (4'), e se inoltre la funzione U risulta indipendente da z , e perciò dipendente soltanto da x ed y , avremo dalla (4'):

$$(4_1) \quad \text{rot } f = \frac{\partial U}{\partial x} I + \frac{\partial U}{\partial y} J.$$

Per trovare un vettore f che verifichi questa equazione, supponiamo, nella (5), $f_1 = f_2 = 0$, e inoltre $f_3 = f(x, y)$ e così avremo $f = f(x, y)K$, da cui:

$$\text{rot } f = \text{grad } f \wedge K = \frac{\partial f}{\partial y} I - \frac{\partial f}{\partial x} J,$$

e confrontando colla (4₁):

$$(11) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y},$$

le quali mostrano che la funzione f — cioè la f_3 della (10) — è la funzione armonica coniugata della U .

(⁴) BOGGIO, *Sulle funzioni associate e sulle linee di forza di un ellissoide*, ecc. (« Rendiconti R. Istituto Lombardo », a. 1905).

L'integrale (10) può pure dedursi direttamente dalla (1), moltiplicandone scalarmente i due membri per K ; si ha così, nelle ipotesi fatte:

$$mP'' \times K - (K \wedge \text{grad } U) \times P' = 0;$$

ora, tenendo anche conto delle (11), risulta:

$$K \wedge \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} J - \frac{\partial U}{\partial y} I = \frac{\partial f}{\partial x} I + \frac{\partial f}{\partial y} J = \text{grad } f,$$

perciò ne segue:

$$mP'' \times K - df/dt = 0,$$

e integrando si conclude la (10).

OSSERVAZIONE. — Nei citati *Elementi di Calcolo vettoriale* è scritto (pag. 90) che se u, v sono vettori qualunque, non si può calcolare il vettore $\text{rot}(u \wedge v)$ senza ricorrere alle omografie vettoriali.

In realtà, questo vettore si può esprimere mediante la derivata secondo una data direzione; precisamente, se si indica con $\frac{\partial u}{\partial V}$ la derivata del vettore u secondo la direzione del vettore v , e con $\frac{\partial v}{\partial U}$ la derivata di v secondo la direzione del vettore u , sussiste la formula:

$$(12) \quad \text{rot}(u \wedge v) = \text{div } v \cdot u - \text{div } u \cdot v + \text{mod } v \cdot \frac{\partial u}{\partial V} - \text{mod } u \cdot \frac{\partial v}{\partial U}.$$

Infatti, considerando i vettori u, v come funzioni di 3 parametri qualunque u_1, u_2, u_3 , si ha, applicando formule note (ed intendendo che la Σ sia estesa ai valori 1, 2, 3 di h);

$$\begin{aligned} \text{rot}(u \wedge v) &= \Sigma \text{grad } u_h \wedge \frac{\partial(u \wedge v)}{\partial u_h} = \Sigma \text{grad } u_h \wedge \left(\frac{\partial u}{\partial u_h} \wedge v - \frac{\partial v}{\partial u_h} \wedge u \right) = \\ &= \Sigma \left(\text{grad } u_h \times v \cdot \frac{\partial u}{\partial u_h} - \text{grad } u_h \times \frac{\partial u}{\partial u_h} \cdot v - \right. \\ &\quad \left. - \text{grad } u_h \times u \cdot \frac{\partial v}{\partial u_h} + \text{grad } u_h \times \frac{\partial v}{\partial u_h} \cdot u \right) = \\ &= \left(\Sigma \text{grad } u_h \times \frac{\partial v}{\partial u_h} \right) u - \left(\Sigma \text{grad } u_h \times \frac{\partial u}{\partial u_h} \right) v + \\ &\quad + \Sigma \text{grad } u_h \times v \cdot \frac{\partial u}{\partial u_h} - \Sigma \text{grad } u_h \times u \cdot \frac{\partial v}{\partial u_h} = \\ &= \text{div } v \cdot u - \text{div } u \cdot v + \text{mod } v \cdot \Sigma \text{grad } u_h \times \frac{v}{\text{mod } v} \cdot \frac{\partial u}{\partial u_h} - \\ &\quad - \text{mod } u \cdot \Sigma \text{grad } u_h \times \frac{u}{\text{mod } u} \cdot \frac{\partial v}{\partial u_h}; \end{aligned}$$

ora $\text{grad } u_h \times \frac{v}{\text{mod } v}$ è la proiezione ortogonale di $\text{grad } u_h$ sulla direzione del vettore v , e perciò vale la derivata di u_h secondo la direzione del vettore v , cioè vale $\partial u_h / \partial V$; ne segue che le ultime due Σ della formula precedente equivalgono alle seguenti:

$$\Sigma \frac{\partial u}{\partial u_h} \frac{\partial u_h}{\partial V}, \quad \text{e} \quad \Sigma \frac{\partial v}{\partial u_h} \frac{\partial u_h}{\partial U},$$

cioè a $\partial u / \partial V$ e $\partial v / \partial U$, e allora sostituendo si ottiene la (12).

In particolare, se $u = K$, la (12) fornisce la (8).