
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

DARIO GRAFFI

Limiti di applicabilità dell'ottica geometrica allo studio di un caso particolarmente importante di propagazione

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **17** (1938), n.4, p. 225–233.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_4_225_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_4_225_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_4_225_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1938.

Limiti di applicabilità dell'ottica geometrica allo studio di un caso particolarmente importante di propagazione.

Nota di DARIO GRAFFI (a Bologna).

Sunto. - Si studia il caso particolare, ma molto interessante, della propagazione di un'onda elettromagnetica piana in un mezzo non assorbente, con permeabilità costante, con costante dielettrica variabile solo in direzione normale all'onda. Si trova una soluzione approssimata delle equazioni di MAXWELL e si determina un limite superiore per l'errore commesso con questa approssimazione. Da esso si deducono le condizioni quantitative che assicurano la possibilità di sostituire nel caso in discorso, l'ottica geometrica all'ottica fisica.

1. Sono ben note le condizioni qualitative che permettono di applicare l'ottica geometrica come approssimazione dell'ottica fisica. Ma, per quanto mi consta, nulla si conosce dal lato quantitativo; in altre parole non si conosce un limite superiore per l'errore che si commette sostituendo l'ottica geometrica all'ottica fisica. In questo lavoro detta lacuna sarà colmata soltanto in piccola parte. Ci si limiterà infatti, allo studio della propagazione per onde piane, in un mezzo non assorbente, stratificato secondo piani paralleli all'onda.

Si tratta di un caso particolare di notevole interesse pratico perchè con esso si schematizza per es. la propagazione nell'atmosfera di un'onda elettromagnetica (luminosa o radiotelegrafica) diretta verticalmente. Sarà così possibile precisare quantitativamente e in modo forse più rigoroso le condizioni che erano già state fissate dal GANS ⁽¹⁾ per l'applicabilità dell'ottica geometrica al caso ora considerato. Si stabiliranno fra l'altro le condizioni per cui si può trascurare l'onda riflessa.

2. Si abbia un'onda elettromagnetica piana normale all'asse y , il campo elettrico $\vec{F}$ sia parallelo all'asse z , il campo magnetico $\vec{H}$ all'asse x . Si ammette così l'onda polarizzata rettilineamente, ma ciò non introduce alcuna restrizione chè, ogni onda, si può sempre scindere in due polarizzate rettilineamente. Si supponga

⁽¹⁾ GANS, *Fortpflanzung des Lichts durch ein inhomogenes Medium*. « Annalen der Physik », serie I, (47), pag. 709, 1915.

poi il mezzo isotropo ⁽¹⁾ non assorbente (cioè con conduttività nulla) con costante dielettrica ϵ positiva ⁽²⁾ dipendente (con continuità) solo da y , con permeabilità costante e uguale a quella del vuoto, come avviene nei mezzi più comuni ⁽³⁾. F e H siano poi funzioni sinusoidali di pulsazione ω del tempo, rappresentabili perciò con i numeri complessi $e^{j\omega t}F$, $e^{j\omega t}H$, qualora j rappresenti l'unità immaginaria. Si avrà dalle equazioni di MAXWELL:

$$(1) \quad \frac{dF}{dy} = -j\mu\omega H, \quad \frac{dH}{dy} = -j\epsilon\omega F.$$

Eliminando H si ha al solito:

$$(2) \quad \frac{d^2F}{dy^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 F,$$

dove λ è la lunghezza d'onda nel punto y definita da:

$$(3) \quad \frac{1}{\lambda} = \sqrt{\epsilon\mu} \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{\sqrt{\epsilon_0\mu}} \frac{\omega}{2\pi} \sqrt{\epsilon_0\mu} = \frac{n}{c} \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n}{\lambda_0},$$

in cui n è l'indice di rifrazione assoluto del mezzo, c , ϵ_0 rispettivamente la velocità della luce e la costante dielettrica nel vuoto; λ_0 è poi la lunghezza d'onda nel vuoto, cioè l'usuale lunghezza d'onda. Ovviamente sia n , sia λ saranno funzioni di y . La (2) è, dal punto di vista analitico, identica all'equazione dello spostamento di un punto materiale di massa unitaria, mobile su una retta, sotto l'azione di una forza di richiamo elastica con coefficiente variabile col tempo. Qui, allo spostamento si è sostituita la F , al tempo la variabile y , al coefficiente della forza di richiamo l'espressione $-\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$. Siccome, qualora detto coefficiente « cessasse » di variare il moto sarebbe armonico, il suo periodo avrebbe così per valore λ .

Ora in altri lavori ⁽⁴⁾ abbiamo studiato a fondo l'equazione (2).

(1) Con questa ipotesi, nel caso della propagazione delle radioonde nella ionosfera, si viene a trascurare l'influenza del campo magnetico terrestre. Del resto le nostre considerazioni si potrebbero estendere, almeno in parte, al caso in discorso.

(2) Nel caso della propagazione nei gas ionizzati può essere anche $\epsilon < 0$.

(3) Più innanzi faremo qualche altra ipotesi, qualitativa e poco restrittiva sulla struttura del mezzo.

(4) *Gli invarianti adiabatici come metodo d'integrazione approssimata di equazioni differenziali*, « Rendiconti Accademia Lincei », 1° sem. 1932, pag. 657; *Sopra alcune applicazioni degli invarianti adiabatici*, « Annali di Matematica », 1936.

Posto per comodità $z = F$ mediante la sostituzione:

$$(4) \quad z = \sqrt{\frac{J\lambda}{\pi}} \sin \theta, \quad (5) \quad \frac{dz}{dy} = \sqrt{\frac{4\pi J}{\lambda}} \cos \theta,$$

dove J e θ sono due nuove funzioni di y , si riconduce l'integrazione della (2) all'integrazione delle equazioni (1):

$$(6) \quad \frac{dJ}{dy} = -J \frac{d \log \frac{2\pi}{\lambda}}{dy} \cos 2\theta, \quad (7) \quad \frac{d\theta}{dy} = \frac{2\pi}{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{d \log \frac{2\pi}{\lambda}}{dy} \sin 2\theta.$$

Queste equazioni, sono state studiate nei lavori citati per valori di J e θ reali, ma sarà facile, con l'artificio che si vedrà, riportarci al caso complesso di cui abbiamo bisogno nella presente questione.

A questo scopo precisiamo un po' di più la natura del mezzo, cioè supponiamolo omogeneo, o meglio coincidente col vuoto ⁽²⁾ da un certo valore di y in poi. Poniamo gli assi in modo che ciò avvenga per $y \leq 0$. Anche per $y > \bar{y}$ il mezzo sia omogeneo e la sorgente delle nostre onde si trovi per valori di y positivi e molto grandi rispetto a $\bar{y}$, in modo che sia lecito ammettere, come abbiamo supposto, le onde piane nella regione in cui il mezzo è eterogeneo. Con questa ipotesi si studia, sia pure in maniera schematizzata, la propagazione verticale delle radioonde nell'atmosfera. Infatti la regione per $y \leq 0$ si può supporre occupata dallo spazio vuoto sopra la ionosfera e perciò omogeneo, per $y > \bar{y}$ dalla bassa atmosfera che si può supporre pure omogenea. E analoghe considerazioni potrebbero farsi per la propagazione verticale di un'onda luminosa nell'atmosfera.

Del resto la condizione dell'omogeneità per $y \geq \bar{y}$ non è strettamente necessaria, come si vedrà, per $y \leq 0$ si può spesso supporre verificata in pratica.

Ciò posto se la sorgente si trova nella regione in cui $y > 0$, per $y < 0$ si avrà un'onda che si propaga nel senso negativo dell'asse y data cioè dalla formula:

$$(8) \quad F = A e^{j \frac{2\pi}{\lambda_0} y}, \quad (9) \quad H = - \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu}} A e^{j \frac{2\pi}{\lambda_0} y},$$

(1) Non deve recare meraviglia che in queste equazioni compaia il logaritmo di λ quantità dimensionale. In realtà nelle nostre equazioni compare la derivata di $\log \frac{2\pi}{\lambda}$ sicchè esse non cambiano, com'è facile provare, al variare delle unità di misura.

(2) Quest'ultima ipotesi è fatta soltanto per comodità, ma non è in alcun modo necessaria.

dove A è una costante che possiamo sempre con una opportuna scelta dell'origine dei tempi supporre reale positiva; gli altri simboli hanno il significato già stabilito.

Vediamo di risolvere la (2) per $y > 0$. A questo scopo ricerchiamo due integrali particolari $J_1, \theta_1, J_2, \theta_2$ di (6) e (7) corrispondenti alle condizioni nel punto $y=0, (J_0, 0), (J_0, \frac{\pi}{2})$. Ovviamente questi integrali, poichè supporremo J_0 reale e positivo, saranno reali. Posto $a = \log \frac{2\pi}{\lambda}$ avremo:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_1 = J_0 e^{-\int_0^y \frac{da}{dy} \cos 2\theta_1 dy} \quad \theta_1 = \int_0^y \frac{2\pi}{\lambda} dy + \frac{1}{2} \int_0^y \frac{da}{dy} \sin 2\theta_1 dy, \\ J_2 = J_0 e^{-\int_0^y \frac{da}{dy} \cos 2\theta_2 dy} \quad \theta_2 = \int_0^y \frac{2\pi}{\lambda} dy + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^y \frac{da}{dy} \sin 2\theta_2 dy. \end{array} \right.$$

Poniamo ora per $y > 0$:

$$(11) \quad F = \sqrt{\frac{J_2 \lambda}{\pi}} \sin \theta_2 + j \sqrt{\frac{J_1 \lambda}{\pi}} \sin \theta_1.$$

Avremo allora per la prima delle (1) tenendo presente la (5):

$$(12) \quad H = \frac{j}{\mu\omega} \frac{dF}{dy} = \frac{j}{\mu\omega} \left(\sqrt{\frac{4\pi J_2}{\lambda}} \cos \theta_2 + j \sqrt{\frac{4\pi J_1}{\lambda}} \cos \theta_1 \right).$$

Questi valori di F e H soddisfano le (1). La prima delle (1) risulta identicamente soddisfatta dalla (12), la seconda, che in base alla (12) si riduce all'equazione (2) è pure soddisfatta perchè F è espressa come somma di soluzioni della (2) del tipo (4). Vediamo se F e H dati da (11) e (12) si riallacciano con continuità per $y=0$ con i valori dati da (8) e (9).

Si ha subito ricordando i valori ⁽¹⁾ di $J_1, J_2, \theta_1, \theta_2$ e λ per $y=0$

(1) Si ricordi che λ per $y=0$ vale λ_0 e che $\frac{2\pi}{\lambda_0} = \sqrt{\epsilon_0 \mu \omega}$. Quindi per la (12)

$$H(0) = -\frac{1}{\mu\omega} \sqrt{\frac{4\pi J_0}{\lambda_0}} = -\frac{1}{\mu\omega} \sqrt{\frac{4\pi^2}{\lambda_0^2} \frac{\lambda_0 J_0}{\pi}} = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu}} A$$

e da questa relazione segue subito la continuità di H . Quella di F si verifica immediatamente.

che le condizioni di continuità sono soddisfatte se :

$$A = \sqrt{\frac{J_0 \lambda_0}{\pi}}, \quad J_0 = \frac{\pi A^2}{\lambda_0},$$

dimodochè le (11) e (12) costituiscono le cercate soluzioni delle (1) per $y > 0$.

Le (10) e (11) non possono avere applicazioni pratiche se non si conosce esplicitamente le J e θ . Ebbene se noi supponiamo trascurabili gli integrali contenenti a (e vedremo fra poco sotto quali

condizioni ciò è lecito) la J si riduce a J_0 , la θ_1 a $\theta_0 = \int_0^y \frac{2\pi}{\lambda} dy$, la $\theta_2 = \theta_0 + \frac{\pi}{2}$ e cosicchè la (11) e (12) diventano ⁽¹⁾:

$$(13) \quad F = \sqrt{\frac{J_0 \lambda \lambda_0}{\lambda_0 \pi}} (\cos \theta_0 + j \sin \theta_0) = A \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_0}} e^{j \int_0^y \frac{2\pi}{\lambda} dy},$$

$$(14) \quad H = \frac{j}{\mu \omega} \sqrt{\frac{4\pi J_0}{\lambda}} (j \cos \theta_0 - \sin \theta_0) = - \sqrt{\frac{\lambda}{\mu \lambda_0}} A e^{j \int_0^y \frac{2\pi}{\lambda} dy}.$$

Queste formule coincidono, salvo una riserva sul valore di H , con quelle trovate dal GANS in base all'ottica geometrica e sono usualmente applicate. Esse rappresentano, in sostanza, un'onda che si propaga nella direzione negativa dell'asse y , perciò nella nostra approssimazione non sono presenti onde riflesse. La velocità di propagazione di fase è data da $\frac{\lambda}{2\pi} \omega = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ cioè la velocità di propagazione è variabile da punto a punto, ma è sempre espressa dalla formula dei mezzi omogenei. L'ampiezza varia poi come $\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_0}}$ ossia per la (3) come $\frac{1}{\sqrt{n}}$ risultato questo già trovato dal GANS e in accordo con il principio dell'energia.

4. Occorre ora discutere sotto quali condizioni sono valide (13) e (14). Osserviamo subito che per un risultato delle mie Note citate ⁽²⁾, tutti gli integrali contenenti a sono in valore assoluto

⁽¹⁾ La costante A si può determinare dalla conoscenza di F o H per un certo valore di y .

⁽²⁾ In particolare quella degli « Annali di Matematica ». Da tener presente che in essa i seni sono scambiati in coseni e viceversa il che non porta però alcuna alterazione nelle formule finali.

nell'intervallo $(0, y)$ inferiori, ad un numero funzione crescente di y che indicheremo con $I(y)$ e che scriveremo più innanzi. Ora è:

$$\begin{aligned}
 (15) \quad & \left| \sqrt{\frac{J_1 \bar{\lambda}}{\pi}} \sin \theta_1 - \sqrt{\frac{J_0 \bar{\lambda}}{\pi}} \sin \theta_0 \right| \leq \left| \sqrt{\frac{J_1 \bar{\lambda}}{\pi}} \sin \theta_1 - \sqrt{\frac{J_0 \bar{\lambda}}{\pi}} \sin \theta_1 \right| \\
 & + \left| \sqrt{\frac{J_0 \bar{\lambda}}{\pi}} \sin \theta_1 - \sqrt{\frac{J_0 \bar{\lambda}}{\pi}} \sin \theta_0 \right| \leq \sqrt{\frac{J_0 \bar{\lambda}}{\pi}} \left(\left| 1 - \sqrt{\frac{J_1}{J_0}} \right| + 2 \left| \sin \frac{\theta_0 - \theta_1}{2} \right| \right) \\
 & \leq \sqrt{\frac{J_0 \bar{\lambda}}{\pi}} \left(\left| 1 - \sqrt{\frac{J_1}{J_0}} \right| + |\theta_1 - \theta_0| \right) \\
 & \leq A \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\lambda_0}} \left(e^{\frac{I(y)}{2}} - 1 + \frac{I(y)}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Poichè analoghi ragionamenti si possono ripetere per la differenza fra $\sqrt{\frac{J_2 \bar{\lambda}}{\pi}} \sin \theta_2$ e $\sqrt{\frac{J_0 \bar{\lambda}}{\pi}} \sin \left(\theta_0 + \frac{\pi}{2} \right)$, si può concludere che la soluzione approssimata, già da noi discussa, differisce, in modulo, da quella esatta per una espressione $\varepsilon(y)$ che vale al massimo, in valore assoluto, il doppio dell'ultimo membro di (15). Si noti poi che se $I(y)$ è molto piccola rispetto all'unità, si da poterne trascurare i quadrati e le potenze superiori si può ammettere:

$$(16) \quad \varepsilon(y) = 2A \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\lambda_0}} I(y).$$

Ora si ha ⁽¹⁾:

$$(17) \quad I(y) \leq \Delta_m a + \left[\left(\pi e^{\Delta_m a} + \frac{1}{2} \right) \Delta_m a + \Delta_m a' \right] \int_0^y \left| \frac{da}{dy} \right| dy,$$

dove $\Delta_m a$, $\Delta_m a'$ sono rispettivamente i massimi in $(0, y)$ delle funzioni $\Delta_y a$, $\Delta_y a'$ date dalle formule (in cui $\lambda(y)$ è la lunghezza d'onda corrispondente a y):

$$\begin{aligned}
 (18) \quad \Delta_y a &= \int_y^{y+\lambda(y)} \left| \frac{da}{dy} \right| dy, & (19) \quad \Delta_y a' &= \frac{\int_y^{y+\lambda(y)} \left| \frac{d^2 a}{dy^2} \right| dy}{\Delta_y a} \lambda(y).
 \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Cfr. Nota « Annali » già citata, pag. 20. Si tenga presente che ora in luogo di t vi è y di ω , $\frac{2\pi}{\lambda}$. Noi supporremo $\frac{da}{dy}$ in $(0, \bar{y})$ non nulla in tutto un intervallo lungo λ , sicchè $\Delta_y a'$ sarà sempre finita. Se ciò non fosse sarebbe possibile ugualmente la trattazione del problema con artifici che qui non è il caso di esporre.

Evidentemente $I(y)$ è funzione crescente di y e poichè per $y > \bar{y}$ $\frac{da}{dy} = 0$ in ogni punto si può concludere che per la validità delle nostre formule approssimate per ogni y , basta che $I(\bar{y})$ sia piccolo rispetto all'unità ⁽¹⁾. Se è nota la legge con cui varia λ con y l'applicazione delle formule sopra scritte non offre alcuna difficoltà, almeno concettuale. Però siccome in molti casi questa legge non è nota sarà opportuno discutere le formule (17), (18), (19) cercando di interpretarle fisicamente, in modo che sia possibile, anche senza conoscere la funzione $\lambda(y)$, intuire la validità o meno delle formule (13) e (14).

Cominciamo col calcolare l'ultimo integrale a secondo membro di (17) posto il suo limite superiore uguale a $\bar{y}$. Nell'intervallo $(0, y)$ la $\lambda(y)$ avrà i suoi punti di massimo o minimo (che supporremo in numero finito) in $y_1, y_2, \dots, y_r, \dots, y_{m-1}$. Allora negli intervalli $(0, y_1), (y_1, y_2), (y_{m-1}, y)$ la funzione $\lambda(y)$ sarà sempre crescente o decrescente sicchè $\frac{d \log \lambda}{dy}$ avrà in questi intervalli sempre lo

(1) Si osservi che dalle nostre formule segue subito la relazione:

$$(\alpha) \quad \left| \frac{F_a - F_e}{F_a} \right| < 2I(y)$$

dove F_e e F_a indicano rispettivamente il valore esatto e approssimato di F nel punto y . Dalla (α) ricordando che il modulo della differenza fra due numeri complessi è superiore alla differenza dei loro moduli si trova facilmente che l'errore relativo commesso nel calcolo approssimato dall'ampiezza di F è dell'ordine di $I(y)$ e indipendente da A . Si ha poi posto

$$\frac{F_e}{F_a} = \rho e^{j\psi}$$

$$(\beta) \quad \rho = \left| \frac{F_e}{F_a} \right| = \left| \frac{F_e - F_a}{F_a} + 1 \right| \geq 1 - 2I(y).$$

Allora dalla (α) e (β) poichè la parte immaginaria $-\rho \sin \psi$ di $\frac{F_a - F_e}{F_a}$ è, in valore assoluto, inferiore o al più uguale al modulo del numero complesso di questo si ha:

$$|\sin \psi| \leq \frac{2I(y)}{1 - 2I(y)}.$$

Poichè ψ è la differenza fra le fasi del valore esatto e approssimato del campo elettrico, si conclude che tale differenza è piccola se lo è $I(y)$ e ciò indipendentemente da A . Anche per quanto si è detto ora la nostra ricerca si riferirà in seguito solo a $I(y)$.

Notiamo che analoghe considerazioni potrebbero farsi per H . Infine osserviamo che le nostre limitazioni per $y < \bar{y}$ valgono qualunque sia il valore di λ per $y > \bar{y}$. Perciò le nostre ipotesi per $y > \bar{y}$ non sono necessarie.

segno. Avremo così, posto $0 = y_0$, $\bar{y} = y_m$:

$$(19) \int_0^{\bar{y}} \left| \frac{da}{dy} \right| dy = \int_0^{\bar{y}} \left| \frac{d \log \lambda}{dy} \right| dy = \sum_0^{m-1} \left| \log \frac{\lambda(y_{r+1})}{\lambda(y_r)} \right| = \sum_0^{m-1} \left| \log \frac{n(y_{r+1})}{n(y_r)} \right|.$$

Questo numero è, di solito, nelle applicazioni assai moderato. Così se per fare un esempio sfavorevole supponiamo $m = 10$ e che in ciascun intervallo n al più si raddoppi o si riduca a metà, il valore di (19) vale al massimo $10 \times \log 2 = \approx 7$.

Perciò affinchè $I(\bar{y})$ sia piccolo devono essere piccole $\Delta_m a$, $\Delta_m a'$, ossia, per ogni y , $\Delta_y a$ e $\Delta_y a'$.

Per dare una interpretazione fisica semplice a queste espressioni occorre fare alcune ipotesi del resto molto attendibili. Cioè ammetteremo anzitutto l'esistenza di intervalli $(y, y + \lambda)$ in cui $\frac{da}{dy}$, $\frac{d^2 a}{dy^2}$ abbiano sempre lo stesso segno. Questa ipotesi è abbastanza ovvia, chè se non fosse verificata, sarebbe, in generale almeno, λ così grande da abbracciare variazioni notevoli di n sicchè $\Delta_m a$, $\Delta_m a'$ risulterebbero troppo grandi e le nostre formule approssimate non sarebbero applicabili.

Di più ammetteremo che $\Delta_m a$, $\Delta_m a'$ abbiano luogo negli intervalli ora specificati. Anche ciò è abbastanza plausibile perchè, in questi intervalli, $\frac{da}{dy}$, $\frac{d^2 a}{dy^2}$ in qualche punto si annullano.

Ciò posto calcoliamo $\Delta_y a$ in un intervallo $(y, y + \lambda)$ in cui a ha sempre lo stesso segno. Si ha allora con le stesse considerazioni con cui si è giunti a (19):

$$(20) \quad \Delta_y a = \left| \log \frac{n(y + \lambda)}{n(y)} \right|.$$

Quindi affinchè $\Delta_y a$ sia piccolo rispetto all'unità deve essere piccolo il logaritmo del rapporto fra i valori di n agli estremi di un intervallo lungo λ , cioè l'indice di rifrazione deve variare di poco in un intervallo lungo λ . Se poi si suppone in questi intervalli $\frac{dn}{dy}$ sensibilmente costante, o meglio se si può sviluppare $n(y + \lambda)$ in serie di TAYLOR e fermarsi al primo termine si ha:

$$(21) \quad \Delta_y a = \log \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{dy} \right),$$

cioè per applicare le formule approssimate deve essere piccolo $\frac{\lambda}{n} \frac{dn}{dy}$. Ecco un'altra forma per enunciare che $\Delta_y a$ è piccolo.

Quanto a $\Delta_y a'$ negli intervalli dove $\left| \frac{d^2 a}{dy^2} \right|$ è positiva si ha:

$$(22) \quad \Delta_y a' = \frac{\left| \left(\frac{da}{dy} \right)_{y+\lambda} - \left(\frac{da}{dy} \right)_y \right|}{\Delta_y a} \lambda = \frac{\left| \left(\frac{d \log n}{dy} \right)_{y+\lambda} - \left(\frac{d \log n}{dy} \right)_y \right|}{\Delta_y a} \lambda.$$

Cioè deve essere piccolo l'incremento di $\frac{d \log n}{dy}$ nel passaggio da y a $y + \lambda$ (o viceversa se si tratta di decremento) rispetto a $\frac{\Delta_y a}{\lambda}$ cioè al valore medio di $\left| \frac{d \log n}{dy} \right|$ nell'intervallo $(y, y + \lambda)$.

Comunque, come si è già detto, le nostre formule generali ci permettono in ogni caso di stabilire sotto quali condizioni quantitative le espressioni approssimate sono valide (¹); e quindi entro quali limiti può essere compresa una eventuale onda riflessa.

Sarà opportuno fare un raffronto fra le nostre condizioni e quelle di GANS. Esse sono analoghe ma non identiche. Anzi le nostre sembrano più restrittive perchè per esempio il GANS trova per l'applicabilità dell'ottica geometrica deve essere piccolo non $\frac{\lambda}{n} \frac{dn}{dy}$ ma il suo quadrato. Si deve notare però che col procedimento del GANS non segue logicamente (e del resto egli non lo afferma) che la differenza fra la soluzione esatta e quella approssimata sia dell'ordine di $\left| \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{dy} \right|^2$ mentre dalle nostre formule quanto abbiamo affermato risulta in modo strettamente rigoroso. E se $\left| \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{dy} \right|$ è trascurabile risulta subito l'identità fra le nostre formule e quelle del GANS anche per H .

(¹) Nelle note citate, abbiamo dato metodi per il calcolo rapido di limiti superiori per $I(y)$.