
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ENEA BORTOLOTTI

Trasformazioni dualistiche e spazi proiettivamente piani

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 17 (1938), n.4, p. 219–223.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_4_219_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_4_219_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1938.

Trasformazioni dualistiche e spazi proiettivamente piani (*).

Nota di ENEA BORTOLOTTI (a Firenze).

Sunto. - L'A. indica le relazioni fra lo studio di una trasformazione dualistica in S_n proiettivo e quello delle connessioni affini proiettivamente piane; indi espone alcuni elementi relativi alla teoria affine e metrica delle trasformazioni dualistiche.

1. In un mio lavoro del 1932 ⁽¹⁾ ho indicato la costruzione della più generale connessione affine simmetrica, *proiettivamente piana*: essa è la connessione affine che in uno spazio proiettivo S_n , in relazione alla connessione proiettiva integrabile dell' S_n , viene subordinata ⁽²⁾ a un qualunque « campo d'iperpiani »: cioè all'assegnazione di una legge di corrispondenza fra i punti e gli iperpiani di S_n , « trasformazione dualistica » di S_n in sè secondo A. TERRACINI ⁽³⁾. Da un punto di vista analitico: le y^x ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon = p_0, p_1, \dots, p_n$) siano, in S_n , coordinate *proiettive omogenee* dei punti; le w^r ($p, q, r, s, t, v, w = 1, \dots, n$) siano coordinate *curvilinee*. Sia $\zeta_x y^x = 0$ (ove $\zeta_x = \zeta_x(u^1, \dots, u^n)$) l'equazione dell'iperpiano corrispondente al punto $y^x = y^x(u^1, \dots, u^n)$ di S_n ; inteso ch , almeno generalmente, tale iperpiano non contenga il punto y^x omologo, posto

$$(1) \quad A_r = - \frac{\zeta_{\beta} \partial_r y^{\beta}}{\zeta_{\beta} y^{\beta}}; \quad y_r^{\beta} = \partial_r y^{\beta}, \quad y_{\lambda}^{\lambda} y^{\lambda} = \delta_{\alpha}^{\beta}$$

($\lambda, \mu, \nu, \tau, \omega = 0, 1, \dots, n$) e indicati con $\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$,

$$(2) \quad \Gamma_{\mu 0}^{\lambda} = \delta_{\mu}^{\lambda}, \quad \Gamma_{\mu r}^{\lambda} = y_{\alpha}^{\lambda} \partial_r y^{\alpha}_{\mu}$$

i parametri normalizzati della connessione proiettiva integrabile

(*) Comunicazione letta nella Sezione A del Congresso della S. I. P. S. il 6-X-1938 (con alcuni complementi).

⁽¹⁾ *Spazi proiettivamente piani*, « Annali di Matem. », (4), 11, 1932, pp. 111-134.

⁽²⁾ Nel senso precisato in un mio precedente lavoro: *Sulle connessioni proiettive*, « Rendiconti Circ. Matem. Palermo », 56, 1932, pp. 1-57, ved. p. 33.

⁽³⁾ Ved.: *Densità di una corrispondenza di tipo dualistico, ed estensione dell'invariante di Mehmke-Segre*, « Atti Accad. Torino », 71, 1935-36, pp. 310-328.

di S_n , in relazione ai riferimenti locali (y^x) , i parametri A_{rs}^t della corrispondente connessione affine proiettivamente piana sono

$$(3) \quad A_{rs}^t = \Gamma_{rs}^t + \delta_r^t A_s + \delta_s^t A_r.$$

Ecco il significato geometrico di questa connessione; se P, P^* sono due punti infinitamente vicini di S_n e π, π^* sono gli iperpiani ad essi corrispondenti, il trasporto affine cui la connessione dà luogo pel passaggio da P a P^* è l'omologia speciale di centro P che muta π in π^* ⁽⁴⁾.

L'iperpiano d'omologia ha, nel riferimento locale (y^x) associato al punto $P(y^x)$, l'equazione

$$(4) \quad p_{rs} x^r du^s = 0$$

(inteso che P^* abbia coordinate curvilinee $u^r + du^r$); il tensore affine p_{rs} , dato da

$$(5) \quad p_{rs} = \Gamma_{rs}^0 + \partial_s A_r - \Gamma_{rs}^t A_t - A_r A_s,$$

è anch'esso, come la connessione affine A_{rs}^t , legato al supposto campo d'iperpiani ζ_x cioè alla trasformazione dualistica che li fa corrispondere ai punti y^x ⁽⁵⁾. La (4) può anche considerarsi, sul-

l'iperpiano π , l'equazione dell' S_{n-2} intersezione con l'iperpiano π^* infinitamente vicino; se poi vi riguardiamo come variabili le du^s , che possono considerarsi coordinate omogenee delle direzioni o delle rette uscenti da P , la (4) dà fra la stella P e l'iperpiano π una correlazione; di ovvio significato geometrico, già osservata — non rappresentata analiticamente — da A. TERRACINI e da B. SEGRE ⁽⁶⁾. La correlazione conserva significato anche quando gli iperpiani π passano pei punti P omologhi, e quindi, sono gli iperpiani tangenti a una V_{n-1}^{n-1} anolonomica; in questo caso tale correlazione è la « proiettività di cella » del BOMPIANI ⁽⁷⁾.

(4) Ved. loc. cit., ⁽⁴⁾, p. 120.

(5) Il tensore p_{rs} può anche esprimersi per elementi della connessione. A_{rs}^t : ved. la mia Nota *Superficie anolonome complementari*. Scritti matem. offerti a L. BERZOLARI, Pavia, 1936, pp. 553-576, p. 560.

(6) Ved. A. TERRACINI, loc. cit.; B. SEGRE, *Invarianti differenziali relativi alle trasformazioni puntuali e dualistiche fra due spazi euclidei*, « Rendiconti Circ. Matem. Palermo », 60, 1936, pp. 224-232.

(7) Ved. *Sulle varietà anolonome*; I. *Alcuni teoremi generali*; II. *Le V_3^2 di S_3 proiettivo*, « Rendiconti Lincei », (6), 27, 1938, pp. 37-45, 45-52; p. 42 della Nota I.

2. La connessione affine A_{rs}^t e il tensore affine p_{rs} vengono dunque determinati quando in S_n sia data una trasformazione dualistica (anche a meno di un'arbitraria trasformazione proiettiva di S_n). Viceversa, data che sia una connessione affine simmetrica proiettivamente piana, risulta determinata (a meno di condizioni iniziali ⁽⁸⁾) una trasformazione dualistica, cioè un campo d'iperpiani cui tale connessione affine è subordinata. *Lo studio differenziale proiettivo delle trasformazioni dualistiche si riconduce dunque allo studio delle connessioni affini simmetriche, proiettivamente piane.* Non mi tratterò più a lungo su questo argomento ⁽⁹⁾: verrò invece a un cenno su proprietà affini e metriche delle trasformazioni dualistiche.

3. Supponiamo che l'ambiente sia un E_n affine. Siano ora in E_n le y^r coordinate cartesiane non omogenee dei punti, e le ζ_r coordinate plückeriane non omogenee dell'iperpiano corrispondente al generico punto y^r ; di più inteso che s'identifichino le coordinate curvilinee u^r con le stesse y^r , le prime (1) divengono

$$(6) \quad A_r = - \frac{\zeta_r}{\zeta_s y^s + 1}$$

e queste A_r risultano ora (in relazione ai cambiamenti delle coordinate cartesiane in E_n) le componenti di un vettore affine covariante: rappresentato geometricamente da una coppia ordinata d'iperpiani paralleli, dei quali il primo passa pel punto P, cioè y^r , e il secondo è l'iperpiano corrispondente a tale punto. Risulta evidente che dare in E_n la trasformazione dualistica è lo stesso che dare il campo di vettori covarianti A_r . Dunque:

La geometria affine delle trasformazioni dualistiche non differisce dalla teoria degli invarianti differenziali affini di un campo di vettori affini covarianti A_r .

Il tensore p_{rs} , ora, nel riferimento adottato, si esprime così:

$$(7) \quad p_{rs} = \partial_s A_r - A_s A_r;$$

esso è il più semplice invariante differenziale del 1° ordine, e in certo senso l'unico; se ne ricavano un tensore simmetrico $p_{(rs)}$ ed

⁽⁸⁾ Indicazioni più precise darò nel lav. cit. ⁽⁹⁾.

⁽⁹⁾ Rimando alla mia Nota *Sulla geometria proiettiva delle trasformazioni dualistiche*, che verrà pubblicata nei « Rendiconti Accad. Lincei ».

uno emisimmetrico $p_{[rs]} = \partial_{[s} A_{r]}$, rotore di A_r . Oltre alla correlazione già detta il tensore p_{rs} dà una trasformazione dei vettori affini controvarianti in vettori covarianti (e viceversa, se $|p_{rs}| \neq 0$):

$$(8) \quad p_{rs} v^s = w_r \quad (\text{e} \quad v^s = p^{rs} w_r; \quad p^{rs} p_{rs} = \delta_s^r).$$

In particolare vi è un vettore affine controvariante h^r cui corrisponde A_r ; univocamente determinato se $|p_{rs}| \neq 0$. La retta che esce da P con la direzione di questo vettore h^r , che potrebbe dirsi « normale affine » relativa alla trasformazione dualistica, ha questo significato: se P^* è infinitamente vicino a P nella direzione di questa retta, e allora soltanto, i piani rispettivamente omologhi sono paralleli. O ancora: tale retta ha quale S_{n-2} omologo, nella correlazione fra la stella P e l'iperpiano π , l' S_{n-2} improprio di π . Si tratta insomma di quella retta già notata da B. SEGRE, che la chiama « direttrice » della trasformazione dualistica nel punto P considerato.

Il più semplice invariante differenziale affine scalare del 1° ordine è naturalmente $a = p_{rs} h^r h^s = p^{rs} A_r A_s = -\frac{1}{1+\lambda}$, ove con λ si indichi il rapporto fra la distanza, misurata nella direzione di h , dei due iperpiani paralleli corrispondenti ai punti P , P^* infinitamente vicini nella medesima direzione, e la distanza $\overline{PP^*}$.

4. Termino con un cenno sulla geometria metrica delle trasformazioni dualistiche (cui sono limitate le precedenti ricerche, già richiamate, di TERRACINI e SEGRE). Sia Q il piede della perpendicolare condotta dal punto generico dello spazio (euclideo) R_n all'iperpiano corrispondente; posto $v = Q - P \left(= \frac{A}{A^2} \right)$, $v = \text{mod } v$, appare manifesto come la geometria metrica differenziale della trasformazione dualistica Ω si identifichi con la teoria degli invarianti differenziali metrici del campo vettoriale v ; o anche, degli invarianti differenziali simultanei della ipersuperficie anolonomica avente quali iperpiani tangenti, nei singoli punti P di R_n , gli iperpiani paralleli a quelli, π , ad essi corrispondenti in Ω ; e del campo scalare v .

Un invariante differenziale metrico scalare è l'angolo φ dei vettori v ed h : detto g_{rs} il tensore metrico fondamentale in R_n si ha

$$(9) \quad h^r = p^{rs} A_s, \quad v^r = \frac{g^{rs} A_s}{g^{rs} A_r A_s}; \quad \cos \varphi = \frac{p^{rs} A_r A_s}{\sqrt{g_{rs} p^{rt} p^{sq} A_t A_q} \sqrt{g^{tq} A_t A_q}}.$$

Il prodotto $\lambda \cos \varphi$ coincide con quello che B. SEGRE chiama l'in-

dice di allungamento di Ω in P . Gli altri invarianti differenziali metrici del 1° ordine ottenuti da B. SEGRE si potranno pure, manifestamente, esprimere pei tensori g_{rs} , p_{rs} e pel vettore A_r ; effettivamente l'angolo infinitesimo $d\theta$ degli iperpiani corrispondenti a due punti infinitamente vicini $P(y^r)$ e $P^*(y^r + dy^r)$ è dato da

$$(10) \quad d\theta^2 = m_{rs} dy^r dy^s \quad \text{con} \quad m_{rs} = \left(g^{tq} - \frac{g^{tq} g^{qv} A_v A_w}{g^{tq} A_t A_q} \right) \frac{p_{tr} p_{qs}}{g^{tq} A_t A_q}.$$

Il « coefficiente di dilatazione » di Ω nella direzione (dy^r) è $\rho = \frac{d\theta}{ds}$; la ricerca degli estremi di ρ dà le *direzioni principali* e i *coefficienti di dilatazione principali*; onde si può infine anche ricavare la *densità* δ della trasformazione dualistica secondo TRICOMI e TERRACINI. Si ha

$$(11) \quad \delta = (-1)^n |p_{rs}| \pmod{A}^{-(n+1)} (A_t y^t + 1).$$