
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUIGI BRUSOTTI

Curve algebriche reali nel piano euclideo e nel piano iperbolico

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 17 (1938), n.4, p. 214–218.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_4_214_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_4_214_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_4_214_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Curve algebriche reali nel piano euclideo e nel piano iperbolico.

Nota di LUIGI BRUSOTTI (a Pavia).

Sunto. - *Si stabilisce il massimo numero di continui di cui può constare la parte reale di una curva algebrica reale d'ordine assegnato nel piano della Geometria euclidea ed in quello della Geometria non euclidea iperbolica.*

1. Per un classico risultato di A. HARNACK ⁽¹⁾, se di una curva piana algebrica reale d'ordine n si considera nel piano della Geometria proiettiva (piano proiettivo) la parte reale, questa si compone al più di

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$$

circuiti; e tale massimo è raggiunto ⁽²⁾.

Il risultato subito si trasporta al piano della Geometria ellittica (piano ellittico) il quale, come è ben noto, invade l'intero piano proiettivo.

⁽¹⁾ A. HARNACK, *Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven*, « Mathematische Annalen », 10 (1876), pag. 189-198.

⁽²⁾ Qui e nel seguito gli eventuali punti isolati si considerano come circuiti degeneri. La circostanza che per $n=2$, $n=3$ l'affermazione di HARNACK richiede l'irriducibilità della curva non porta conseguenze nelle conclusioni finali.

2. Già nel piano della Geometria euclidea (piano euclideo) si può invece porre il problema del massimo numero di *continui* di cui possa constare la parte reale di una curva algebrica reale Γ d'ordine n .

Introdotta perciò nel piano proiettivo una retta frontiera (la retta impropria) tali continui saranno o circuiti (al finito) o « segmenti » (cogli estremi sulla retta impropria).

Sia k il numero dei circuiti della parte reale di Γ nel piano proiettivo, q il numero di quelli fra essi sui quali sono distribuite le j intersezioni reali distinte di Γ colla retta impropria (considerandosi però come distinte le intersezioni su rami distinti ed escludendosi quelle eventualmente dovute a punti isolati).

Si avrà:

$$(1) \quad 0 \leq q \leq k \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$$

$$(2) \quad 1 \leq q \leq j \leq n, \text{ oppure } q = j = 0.$$

La parte reale di Γ nel piano euclideo conterà allora di $k - q$ circuiti e di j segmenti, onde il numero totale dei *continui* sarà:

$$(3) \quad c = k - q + j$$

e dalle (1), (2) si dedurrà:

$$c \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n,$$

ottenendosi

$$(4) \quad c = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n = \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

solo per:

$$(5) \quad k = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1, \quad q = 1, \quad j = n.$$

D'altra parte per ogni valore di n è nota l'esistenza di curve Γ soddisfacenti alle due condizioni seguenti:

I). La parte reale nel piano proiettivo consta del massimo numero di circuiti.

II). Esiste una retta le cui n intersezioni con Γ sono tutte raccolte su un circuito di questa (e tutte distinte).

Tali sono le curve che intervengono nel procedimento ricorrente di A. HARNACK ⁽³⁾ e le curve dette « generatrici bifronti » ⁽⁴⁾.

⁽³⁾ Cfr. ⁽¹⁾, pag. 195-196.

⁽⁴⁾ L. BRUSOTTI, *Sulla generazione delle curve piane di genere p dotate di p + 1 circuiti*, « Rend. Ist. Lomb. », (2), 43 (1910), pag. 143-156 (a pag. 146); *Nuovi metodi costruttivi di curve piane d'ordine assegnato dotate del massimo numero di circuiti*. Nota IV, Ibid., (2), 49 (1916), pag. 495-510.

Se, com'è lecito, la retta che interviene in II) si suppone coincidente con quella impropria, sono soddisfatte per l' le condizioni (5).

Onde si conclude:

Nel piano euclideo la parte reale di una curva algebrica reale di ordine n consta al più di

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1$$

continui e tale massimo è raggiunto; nel caso di massimo i detti continui si ripartiscono in $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ circuiti ed in n segmenti ».

OSSERVAZIONE. — Sotto altra forma si può affermare che le soluzioni reali e finite di un'equazione algebrica a coefficienti reali in due incognite si distribuiscono al più in

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1$$

continui e che tale massimo è raggiunto; nel caso di massimo i detti continui si ripartiscono in $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ continui rientranti in sè ed in n continui aperti (questi soltanto con soluzioni a valori assoluti grandi a piacere per una almeno delle incognite, ma di regola per entrambe).

3. Si passi ora a considerare il problema del massimo numero di continui per la parte reale di una curva algebrica reale nel piano della Geometria iperbolica (piano iperbolicco).

In esso, poichè la nozione di curva algebrica è proiettiva, è essenziale, con F. KLEIN ⁽⁵⁾, subordinare la Geometria iperbolica alla Geometria proiettiva, identificando il piano iperbolicco colla regione del piano proiettivo interna ad una conica Ω a punti reali, assunta come assoluto nel senso di CAYLEY-KLEIN ⁽⁶⁾, in armonia con una nota rappresentazione di E. BELTRAMI ⁽⁷⁾.

⁽⁵⁾ Cfr. specialmente F. KLEIN, *Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie*, « Mathematische Annalen », 4 (1871), pag. 573-625, a pag. 607, oppure « Ges. math. Abhandlungen », 1 (1921), pag. 254-305, a pag. 287.

⁽⁶⁾ Cfr. ⁽⁵⁾ ed inoltre A. CAYLEY, *A sixth memoir upon quantics*, « Phil. Trans. of the R. Soc. of London », 149 (1859), pag. 61-90, oppure « Collected mathematical papers », 2 (1889), pag. 561-592, a pag. 586.

⁽⁷⁾ Cfr. E. BELTRAMI, *Saggio di interpretazione delle Geometria non euclidea*, « Giorn. di Matematiche », 6 (1868), pag. 284-312, specialmente a pag. 290, oppure « Opere matematiche », 1 (1902), pag. 374-405, a pagine 380-81.

Introdotta ancora nel piano proiettivo la parte reale di una curva algebrica reale Γ , essa, prescindendo dalle eventuali intersezioni con Ω , in generale conterà di una parte interna ad Ω , da considerarsi come parte reale nel piano iperbolico, e di una parte esterna, da considerarsi invece, nel senso della Geometria iperbolica, come parte *ideale*.

Per semplicità di discorso si supporrà che Γ non abbia su Ω punti multipli e non abbia con essa contatti, pur avvertendo che il risultato finale è indipendente da tali restrizioni.

Dopo ciò, detto ancora k il numero dei circuiti della parte reale in senso proiettivo, sia k_1 (risp. k_2) il numero di quelli che sono totalmente interni (risp. esterni) ad Ω e q il numero di quelli su cui si distribuiscono le $2j$ intersezioni reali con Ω , di cui risp.

$$2j_1, 2j_2, \dots, 2j_q$$

sui singoli circuiti

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q,$$

con

$$j = j_1 + j_2 + \dots + j_q \leq n.$$

Ora le $2j_i$ intersezioni su γ_i lo dividono in $2j_i$ segmenti, di cui j_i interni ed j_i esterni ad Ω .

Ne segue che nel piano iperbolico la parte reale di Γ consta di k_1 circuiti e di j segmenti (mentre la parte ideale consta di k_2 circuiti e di j segmenti).

È dunque nel piano iperbolico

$$c = k_1 + j$$

il numero dei continui della parte reale, ed, avendosi

$$1 \leq q \leq j \leq n, \quad k_1 \leq k - q \leq k - 1 \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

oppure

$$q = j = 0, \quad 1 < n, \quad k_1 \leq k \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1,$$

sarà in ogni caso:

$$c \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n$$

e si avrà:

$$c = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n = \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

solo quando valgano insieme le

$$j = n, \quad k_1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

il che implica

$$q = 1, \quad k = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1.$$

4. Per dimostrare che tale massimo per c è raggiunto basterà dunque provare l'esistenza di curve Γ piane algebriche reali di ordine n comunque assegnato, la cui parte reale in senso proiettivo consti del massimo numero di circuiti e per cui esista una conica Ω a punti reali, alla quale siano interni tutti i detti circuiti salvo uno secante Ω in $2n$ punti; indi assumere Ω come assoluto.

Si parta (num. 2) da una Γ (d'ordine n) la cui parte reale in senso proiettivo consti del massimo numero di circuiti e per cui esista una retta (reale) g le cui n intersezioni con Γ siano tutte raccolte su uno di detti circuiti (e tutte distinte).

Se, in un riferimento proiettivo reale, è

$$u = 0$$

l'equazione di g ed è

$$f = 0$$

quella di una conica reale non avente con g intersezioni reali, l'equazione

$$u^2 + \lambda f = 0,$$

per λ reale, di segno opportuno e di valore assoluto abbastanza piccolo, rappresenta una conica Ω dedotta dalla retta g contata due volte mediante « piccola variazione » per totale sdoppiamento ed includente nella regione interna tutti i circuiti di Γ non secanti g .

Invece il circuito di Γ secante g in n punti taglierà Ω in $2n$ punti distinti, distribuiti in n coppie ottenute per sdoppiamento dalle n intersezioni di Γ con g .

Segue:

Nel piano iperbolico la parte reale di una curva algebrica reale di ordine n consta al più di

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1$$

continui e tale massimo è raggiunto; nel caso di massimo i detti continui si ripartiscono in $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ circuiti ed in n segmenti.