
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

J. C. VIGNAUX

Il teorema di Abel per le serie doppie e la sua generalizzazione

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **17** (1938), n.4, p. 209–214.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_4_209_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_4_209_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1938.

PICCOLE NOTE

Il teorema di Abel per le serie doppie e la sua generalizzazione.

Nota di J. C. VIGNAUX (a Buenos Aires).

Sunto. - Si dimostrano alcune proposizioni relative alle serie doppie di potenze di due variabili reali.

1. Il classico teorema di ABEL relativo alle serie di potenze e le sue generalizzazioni di FROBENIUS ⁽¹⁾, di HÖLDER ⁽²⁾ e di BROMWICH ⁽³⁾ furono estese alle serie doppie di potenze da BROMWICH-HARDY ⁽⁴⁾ e da C. MOORE ⁽⁵⁾.

In questa Nota propongo un'altra dimostrazione del teorema di ABEL e poi dò un teorema che contiene, come caso particolare i teoremi di ABEL, FROBENIUS e HÖLDER per le serie doppie.

Data una serie doppia

$$(1) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$$

diremo che *converge stabilmente* se essa converge (PRINGSHEIM) ed esiste una costante positiva M , tale che ⁽⁶⁾

$$|s_{m,n}| < M \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

dove

$$s_{m,n} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij}.$$

Se la serie doppia (1) è *convergente stabilmente* con somma s , la serie doppia di potenze

$$(2) \quad f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} x^m y^n$$

⁽¹⁾ G. FROBENIUS, « Journ. f. Math. », 89, 262-264 (1880).

⁽²⁾ O. HÖLDER, « Math. Ann. », 20, 535-549 (1882).

⁽³⁾ T. J. I. BROMWICH, « Math. Ann. », 65, 350-369 (1908).

⁽⁴⁾ BROMWICH and G. H. HARDY, « Proc. Lond. Math. Soc. », (2), 2, 161-189 (1904).

⁽⁵⁾ C. N. MOORE, « Trans. Amer. Math. Soc. », 14, 73-104 (1913).

⁽⁶⁾ Condizione di *finitud* (HARDY-BROMWICH).

di due variabili reali x e y converge nel dominio $||x| < 1, |y| < 1|$ ed è

$$\lim_{x, y \rightarrow 1} f(x, y) = s.$$

Consideriamo due successioni $\{x_i\}, \{y_j\}$ tali che $x_i \rightarrow 1, y_j \rightarrow 1$; il teorema sarà dimostrato se si prova che

$$\lim_{(i, j) \rightarrow \infty} f(x_i, y_j) = s.$$

Per ipotesi, la successione $s_{m, n}$ converge stabilmente ⁽¹⁾ ad s per $(m, n) \rightarrow \infty$, e la successione doppia di matrice

$$\|A_{m, n}^{(i, j)}\|$$

dove

$$A_{m, n}^{(i, j)} = (1 - x_i)(1 - y_j)x_i^m y_j^n$$

soddisfa alle condizioni necessarie e sufficienti di TOEPLITZ-ROBISON ⁽²⁾ perchè la trasformata

$$\sigma_{i, j} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m, n}^{(i, j)} s_{m, n} = (1 - x_i)(1 - y_j) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} s_{m, n} x_i^m y_j^n$$

converga verso lo stesso limite s quando $(i, j) \rightarrow \infty$.

⁽¹⁾ È *bounded convergent* secondo la terminologia di H. J. HAMILTON, *On transformations of double series*. « Bull. Amer. Math. Soc. », T. 42; *Transformations of multiple sequences*, « Duke Math. Journ. », T. 2.

⁽²⁾ G. M. ROBISON, *Divergent double sequences and series*. (« Trans. of the Amer. Math. Soc. », V, 28 (1926)). - H. J. HAMILTON, l. c.

La proposizione citata stabilisce che affinché

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{mnkl} x_{kl} = x,$$

quando

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} x_{m, n} = x,$$

è necessario e sufficiente che

$$a) \lim_{m, n \rightarrow \infty} a_{mnkl} = 0 \text{ per ogni } k \text{ ed } l;$$

$$b) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{mnkl}| \text{ converge per ogni } m \text{ ed } n;$$

$$c) \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{mnkl} = 1;$$

$$d) \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{mnkl}| = 0 \text{ per ogni } l;$$

$$e) \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{mnkl}| = 0 \text{ per ogni } k;$$

$$f) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{mnkl}| \leq A \text{ per ogni } m \text{ ed } n;$$

ciò che si verifica facilmente nel nostro caso.

Avendo presente che

$$(1-x_i)(1-y_j) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} s_{m,n} x_i^m y_j^n = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} x_i^m y_j^n = f(x_i, y_j),$$

allora si ha

$$f(x_i, y_j) \rightarrow s.$$

Questo teorema sussiste pure per le serie doppie convergenti regolarmente (¹), perchè, come facilmente si prova, ogni serie regolarmente convergente è pure stabilmente convergente.

2. Metodo di Cesaro (C, r, s). — Consideriamo la serie doppia

$$(1) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$$

e poniamo

$$\sigma_{m,n} = \frac{S_{m,n}^{(r,s)}}{A_{m,n}^{(r,s)}},$$

dove

$$S_{m,n}^{(r,s)} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m+r-i}{r} \binom{n+s-j}{s} a_{ij},$$

$$A_{m,n}^{(r,s)} = \binom{m+r}{m} \binom{n+s}{n}, \quad \binom{\delta+p}{p} = \frac{\Gamma(\delta+p+1)}{\Gamma(\delta+1)\Gamma(p+1)};$$

si dice che la serie doppia (1) è sommabile CESARO di ordine (C, r, s) o *sommabile* (C, r, s) ($r, s > -1$) quando il doppio limite

$$(2) \quad \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sigma_{m,n} = S,$$

esiste ed è finito. Il numero S chiamasi *somma* della serie doppia data.

Diremo che (1) è *sommabile stabilmente* (C, r, s) se oltre ad esistere il limite (2) si verifica la condizione

$$\left| \frac{S_{m,n}^{(r,s)}}{A_{m,n}^{(r,s)}} \right| < C, \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

dove C è una costante positiva.

Per $r=s=0$, risulta allora

$$\sigma_{m,n} = s_{m,n}$$

(¹) G. HARDY, « Proceedings of the Cambridge Philosophical Society », Vol. XIX, p. 86 (1917).

dunque la sommabilità $(C, 0, 0)$ e la sommabilità stabile $(C, 0, 0)$ coincidono rispettivamente con la convergenza e con la convergenza stabile.

Se la serie doppia di potenze

$$f(x, y) = \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} a_{m,n} x^m y^n$$

converge nel dominio $|x| < 1, |y| < 1$, si ha

$$\sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} a_{m,n} x^m y^n = (1-x)^{r+1} (1-y)^{s+1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} S_{m,n}^{(r,s)} x^m y^n$$

e reciprocamente, per r e s intero e positivo. L'uguaglianza si verifica pure quando r e s sono numeri reali ($r > -1, s > -1$), x e y nel detto dominio.

Proveremo ora il seguente teorema:

Se la serie doppia (1) è sommabile stabilmente (C, r, s) , ($r > -1, s > -1$) con somma s , la serie doppia di potenze

$$(3) \quad f(x, y) = \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} a_{m,n} x^m y^n$$

delle variabili reali x e y converge nel dominio $|x| < 1, |y| < 1$ e si ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 1} f(x, y) = s.$$

Per ipotesi, la successione doppia

$$\sigma_{m,n} = \frac{S_{m,n}^{(r,s)}}{\binom{r+m}{m} \binom{s+n}{n}}$$

tende per $(m, n) \rightarrow \infty$ al suo limite s , e di più

$$(4) \quad |\sigma_{m,n}| < C, \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Pertanto la relazione

$$\sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} a_{m,n} x^m y^n = (1-x)^{r+1} (1-y)^{s+1} \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} S_{m,n}^{(r,s)} x^m y^n,$$

ci dà, secondo le (3) e (4),

$$\left| \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} a_{m,n} x^m y^n \right| < C |1-x|^{r+1} |1-y|^{s+1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r+m}{m} \binom{s+n}{n} |x|^m |y|^n,$$

di sorta che per

$$|x| < \rho < 1, \quad |y| < \mu < 1,$$

il primo membro ha per maggiorante la serie doppia convergente

$$C(1+\rho)^{r+1}(1+\mu)^{s+1} \sum_0^\infty \sum_0^\infty \binom{r+m}{m} \binom{s+n}{n} \rho^m \mu^n,$$

ciò che ci prova la convergenza della serie doppia (2) nel dominio $||x| < 1, |y| < 1|$.

Ora consideriamo due successioni di numeri $|x_i|, |y_j|$ appartenenti a questo dominio e tali che $x_i \rightarrow 1, y_j \rightarrow 1$; si ha allora

$$f(x_i, y_j) = (1-x_i)^{r+1} (1-y_j)^{s+1} \sum_0^\infty \sum_0^\infty \sigma_{m,n} \binom{m+r}{r} \binom{n+s}{s} x_i^m y_j^n,$$

$$f(x_i, y_j) = \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty a_{m,n}^{(i,j)} \sigma_{m,n}$$

dove abbiamo messo

$$a_{m,n}^{(i,j)} = \binom{m+r}{r} \binom{n+s}{s} (1-x_i)^{r+1} (1-y_j)^{s+1} x_i^m y_j^n.$$

Poichè la matrice doppia

$$\| a_{m,n}^{(i,j)} \|$$

soddisfa alle condizioni del teorema di TOEPLITZ-ROBISON menzionato ⁽¹⁾, risulta allora che

$$\sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty a_{m,n}^{(i,j)} \sigma_{m,n} \rightarrow s,$$

cioè

$$\lim_{(i,j) \rightarrow \infty} f(x_i, y_j) = s.$$

Per $r=s=0$ risulta come caso particolare il teorema di ABEL-BROMWICH-HARDY, e per $r=s=1$ il teorema di FROBENIUS-BROMWICH-HARDY.

3. Data la serie doppia (1), diremo che essa è sommabile regolarmente (C, r, s) se la successione doppia $\sigma_{m,n}$ converge regolarmente.

⁽¹⁾ Ciò si prova immediatamente tenendo presente che

$$\sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty a_{m,n}^{(i,j)} = (1-x_i)^{r+1} (1-y_j)^{s+1} \sum_0^\infty \sum_0^\infty \binom{r+m}{r} \binom{s+n}{s} x_i^m y_j^n = 1,$$

e

$$\sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty |a_{m,n}^{(i,j)}| = \left(\frac{1-|x_i|}{1-|x_i|} \right)^{r+1} \cdot \left(\frac{1-|y_j|}{1-|y_j|} \right)^{s+1} < N.$$

Poichè ogni serie regolarmente sommabile (C, r, s) è pure stabilmente sommabile (C, r, s) con eguale somma, il teorema precedente sussiste pure per queste.

Questo teorema stabilisce anche la relazione fra la potenza dei metodi di sommazione di ABEL e di CESARO (C, r, s) .

La serie doppia (1) è sommabile ABEL con somma S , se la serie di potenze

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n,$$

converge nel dominio $|x| < 1, |y| < 1$ ed è

$$\lim_{(x, y) \rightarrow 1} f(x, y) = S.$$

Risulta allora che ogni serie sommabile (C, r, s) è pure sommabile ABEL.