
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni

- * V. Volterra e B. Hostinsky: Opérations différentielles linéaires. Applications aux équations différentielles et fonctionnelles (S. Cherubino)
- * H. Zassenhaus: Lehrbuch der Gruppentheorie (Gaetano Scorza)
- * G. Hamel: Integralgleichungen: Einführung in Lehre und Gebrauch (B. Levi)
- * A. Agostini: Lezioni di Analisi Matematica. Vol. II (Silvio Cinquini)
- * H. Ertel: Methoden und Probleme der Dynamischen Meteorologie.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **17** (1938), n.3, p. 191–202.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_3_191_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_3_191_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_3_191_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1938.

RECENSIONI

V. VOLTERRA e B. HOSTINSKY: *Opérations différentielles linéaires. Applications aux équations différentielles et fonctionnelles*. Paris, Gauthiers-Villars, (Collection Borel) 1938, pp. VII-238.

Il volume appare a buon punto, ora che il calcolo di matrici ha già ricevute tante e così notevoli applicazioni all'analisi ed alla fisica, soprattutto nella teoria dei quanta.

Ma quest'opera non è un trattato di calcolo di matrici e si discosta molto dalla linea direttiva che ha presieduto alle applicazioni poco fa mentovate. Essa è fondata essenzialmente ed esclusivamente sulle idee che già avevano guidato il VOLTERRA nell'istituzione della teoria dei funzionali e delle equazioni integrali ed è imperniata sui risultati di due importanti Memorie, comparse nel 1887 e nel 1902, nelle quali l'illustre Autore aveva sviluppato un calcolo differenziale e integrale delle sostituzioni, cioè delle matrici, analogo a quello ordinario.

B. HOSTINSKY, nel 1931, estese l'integrazione delle sostituzioni alle trasformazioni, funzionali lineari e ne fece applicazioni al calcolo delle probabilità ed alla fisica, dimostrando così l'interesse che quei lavori del VOLTERRA (che allora avevano di mira forse soltanto i sistemi di equazioni differenziali) potevano presentare in altri campi dell'analisi e nella fisica. Non altrimenti il calcolo delle matrici propriamente detto si era anch'esso dimostrato preziosissimo nella teoria delle equazioni funzionali ed integrali.

Il libro può dirsi diviso in tre parti. La prima è costituita da 4 capitoli, dei quali i primi tre contengono alcune nozioni di calcolo delle matrici: operazioni e notazioni, equazioni e radici caratteristiche, divisori elementari e forma canonica. Il quarto dà la costruzione delle matrici permutabili con una data, come ottenuta dal VOLTERRA nella prima delle due citate Memorie.

Nella seconda parte, che consta dei capitoli dal 5° al 15°, è contenuta un'accurata e completa riesposizione di queste Memorie, mentre gli ultimi tre capitoli riguardano le ricerche di HOSTINSKY sulle trasformazioni funzionali lineari.

1. Le matrici (o sostituzioni) alle quali il VOLTERRA estende le operazioni del calcolo infinitesimale e integrale hanno per elementi funzioni di una o più variabili (reali o complesse) ⁽¹⁾.

Una matrice $S = \|a_{ik}\|$, $a_{ik} = a_{ik}(x)$, ($i, k = 1, 2, \dots, n$), funzione della variabile reale x , vien detta *limitata* e *continua* (in x) se son tali gli elementi a_{ik} ; si dice *derivabile* in x , se lo sono ancora gli a_{ik} e se, inoltre, il suo determinante, calcolato in x , è diverso da zero. Indicando con a'_{ik} le derivate degli elementi a_{ik} in x , per *derivate destra* o *sinistra* di S in x s'intendono le due matrici

$$S \frac{d}{dx} = S^{-1} \cdot \|a'_{ik}\|, \quad \frac{d}{dx} S = \|a'_{ik}\| \cdot S^{-1}.$$

Segue subito che la derivata destra (sinistra) della reciproca S^{-1} di S è l'opposta della derivata sinistra (destra) di S .

I differenziali destro e sinistro s'indicano, in conseguenza, con

$$Sd = S \frac{d}{dx} dx = S^{-1} \|da_{ik}\|, \quad dS = \frac{d}{dx} S dx = \|da_{ik}\| S^{-1}.$$

Se il determinante di S è costante, quello di dS e di Sd differisce dall'unità per infinitesimi di ordine superiore a Δx .

Se x varia nell'intervallo (p, q) , dividendo questo in m parti di ampiezze $h_1, h_2, \dots, h_m$ a partir da $p < q$ e dicendo x_r un valore di x appartenente all'intervallo di ampiezza h_r , si considerano le m matrici

$$T_r = I + h_r S(x_r) \quad (r = 1, 2, \dots, m)$$

che si ottengono ponendo, negli elementi di S , $x = x_r$, moltiplicandoli tutti per h_r e aggiungendo l'unità agli elementi della diagonale principale. Dopo di che, gli integrali *sinistro* e *destro* di $S(x)$ si definiscono ponendo

$$\int_p^q S dx = \lim (T_m \cdot T_{m-1} \cdot \dots \cdot T_2 \cdot T_1), \quad S dx \int_p^q = \lim (T_1 \cdot T_2 \cdot \dots \cdot T_{m-1} \cdot T_m),$$

e supponendo che, al tendere a zero di tutti gli intervalli parziali h_r , i limiti dei prodotti a secondo membro esistano. Ciò accade certamente quando gli elementi $a_{ik}(x)$ di S son funzioni limitate ed integrabili di x in (p, q) .

⁽¹⁾ Si tratta, quindi, di matrici funzioni di una matrice scalare xI , prodotto della variabile scalare x per la matrice identica I , o di matrici funzioni di più matrici scalari $xI, yI, \dots$.

Gli elementi dei due integrali sinistro e destro vengono dati mediante due serie di integrali ordinari.

Valgono proprietà analoghe a quelle degli integrali ordinari: in particolare, se $S = \|a_{ik}(x)\|$ è *limitata* e *continua*, la derivata destra (sinistra) dell'integrale destro (sinistro) di S rispetto al limite superiore è la S stessa.

Un'importante proprietà è che, qualunque sia l'intervallo (p, q) , se S è continua, i suoi integrali sinistro e destro hanno per comune determinante

$$e^{\int_p^q \left[\sum_{i=1}^n a_{ii}(x) \right] dx}$$

e che l'annullarsi della traccia $\sum_{i=1}^n a_{ii}(x)$ di S è condizione necessaria e sufficiente perchè S sia derivata di una matrice a determinante costante.

Infine, le matrici S che han per derivata sinistra (destra) una stessa matrice continua T son tutte e sole quelle date da

$$S = \int_p^x T dx \cdot U, \quad \left[S = U \left(\int_p^x T dx \right) \right],$$

ove U è una matrice costante arbitraria, non degenera.

Segue, come applicazione immediata, che i sistemi differenziali lineari ($i, k = 1, 2, \dots, n$)

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \cdot y_j, \quad \frac{dy_k}{dx} = \sum_{i=1}^n a_{ik}(x) \cdot y_i,$$

ammettono rispettivamente come soluzioni fondamentali le colonne, o le righe, dei due integrali indefiniti sinistri e destri di $S = \|a_{ik}\|$, il cui fattore costante arbitrario U permette di soddisfare le condizioni iniziali.

2. Dopo la derivazione e la differenziazione parziale e totale delle matrici funzioni di due o più variabili e le condizioni perchè una forma differenziale lineare sia un differenziale esatto (cap. IX) si passa, nel cap. X, agli integrali doppi ed a quelli curvilinei.

Per definizione, si ha

$$\iint_{\sigma} S dx dy = \int_{y_0}^{y_1} T dy, \quad T = \left\| \int_A^B a_{ik} dx \right\|$$

dove A e B son le ascisse dei punti (sempre due soli) in cui la parallela all'asse x alla distanza y incontra il contorno s di σ

ed (y_0, y_1) è l'intervallo in cui varia y quando il punto xy descrive s .

Dette $S = \|a_{ik}\|$, $S_1 = \|b_{ik}\|$ due matrici i cui elementi son funzioni di x ed y definite nel dominio σ , si ha, ancora per definizione,

$$\int_A^B S dx \cdot S_1 dy = \left\| \int_A^B \left(a_{ik} \frac{dx}{ds} + b_{ik} \frac{dy}{ds} \right) ds \right\|,$$

dove gli elementi della matrice a secondo membro son integrali curvilinei ordinari calcolati lungo l'arco $\overline{AB}$, interno a σ . Val senz'altro la relazione

$$\int_A^{B'} S dx \cdot S_1 dy = \left[\int_B^A S dx \cdot S_1 dy \right]^{-1},$$

che dà la prima proprietà degl'integrali curvilinei. Seguono, fra gl'integrali curvilinei e gl'integrali doppi di VOLTERRA, varie relazioni aventi analogia con quelle per gli integrali ordinari delle funzioni di due variabili reali.

Dopo di che è chiaro in che modo, continuando l'analogia con le funzioni ordinarie, è possibile passare a dare la nozione di matrice funzione di una variabile complessa z e dedurne le proprietà fondamentali.

Integrando due volte una matrice T lungo una linea chiusa s del dominio di variabilità di z , partendo da due punti diversi, ma nello stesso senso, si hanno due matrici S_1 , S_2 l'una trasformata dall'altra: $S_1 = US_2U^{-1}$. Perciò s determina soltanto la forma canonica dell'integrale lung'hessa calcolato. Questa forma canonica è detta dall'A. *sostituzione* (o matrice) *caratteristica* della linea chiusa s . Pensando ai due integrali sinistro e destro, le due sostituzioni caratteristiche, relative a una stessa s , si mutano l'una nell'altra scambiando le radici caratteristiche dell'una nelle reciproche di quelle dell'altra. Esse si scambiano anche fra loro se si muta il senso d'integrazione su s .

Se T è funzione *olomorfa* di z il teorema di CAUCHY prende l'aspetto

$$\int_s T dz = I = \|\delta_{ik}\|$$

per ogni cammino chiuso s interno al dominio σ . Seguono le ordinarie conseguenze.

Se s rinchiede un sol punto singolare isolato, l'integrale ora detto dà luogo, con la caratteristica di s , al *residuo* di T in detto punto.

3. Per punto di *diramazione abeliano sinistro* (destro) l'A. intende un punto di diramazione della matrice T che non è di diramazione per la derivata sinistra (destra). Descrivendo un cammino chiuso intorno a tal punto, T vien moltiplicata *a destra* (a sinistra) per la trasformata del residuo della derivata in quel punto: tal fattore costante vien detto *modulo* del punto di diramazione considerato.

Polo di prima specie è ogni polo di qualche elemento di T . *Polo di seconda specie e punto di ramificazione polare sinistro o destro* di T è un punto singolare o di ramificazione di T polo di prima specie per la derivata sinistra o destra.

Il calcolo del modulo in un punto $z = z_0$ dà quello degli elementi di una matrice che ha questo come punto di diramazione abeliano.

Considerando un sistema di equazioni differenziali lineari, a coefficienti funzioni uniformi di z , proveniente da un'equazione differenziale lineare di ordine n , si hanno le note formole di FUCHS, relative allo sviluppo delle soluzioni di quest'equazione nell'intorno del punto singolare.

Matrice *algebrica* è quella i cui elementi sono uniformi e regolari su di una superficie di RIEMANN: se priva di poli, una tal matrice è necessariamente costante.

Sia T una matrice a traccia nulla, E la sua riemanniana, resa semplicemente connessa coi soliti $2p$ tagli normali. Per escludere da R i punti ove T ammette un polo con residuo diverso da I , basterà circondarli con piccoli contorni chiusi che si congiungeranno, con tagli opportuni, ad uno stesso punto del contorno di R . Si ottiene così una nuova superficie R' ancora semplicemente connessa. L'integrale destro o sinistro di T caleolato lungo un arco di R' si dice *matrice abeliana semplice* destra o sinistra. Queste matrici giuocano un ruolo analogo a quello degli integrali abeliani della teoria delle funzioni algebriche di una variabile. Le destre sono le inverse di quelle sinistre. Matrici *abeliane doppie* son quelle i cui valori sui due bordi di ciascun taglio si deducono l'uno dall'altro moltiplicando *a destra ed a sinistra* per matrici costanti lungo quel taglio o lungo una sua porzione compresa fra due nodi consecutivi. Le derivate di tali matrici sono *matrici trasformanti*, cioè tali che i valori lungo un bordo si ottengono trasformando con matrici costanti i valori lungo l'altro bordo; gli integrali di una matrice trasformante sono matrici abeliane doppie.

Le proprietà delle matrici abeliane doppie non hanno riscontro nella teoria degli ordinari integrali abeliani.

Nei capitoli XIV e XV sono sviluppate molte e belle pro-

prietà delle matrici abeliane, sulle quali tacciamo per ragioni di spazio.

4. Gli ultimi tre capitoli son dovuti totalmente a B. HOSTINSKY. Il primo dei tre (il XVI) è un'introduzione e un riassunto degli altri due.

Se $f(x)$ è una funzione appartenente a una certa classe (ad es. quella delle funzioni continue di variabile reale) si dice che $S(f)$ è una trasformazione funzionale lineare se la funzione $g = S(f)$ gode la proprietà che, per A e B due costanti e $f_1(x)$, $f_2(x)$ due funzioni di quella classe, si ha

$$S(Af_1 + Bf_2) = A \cdot S(f_1) + B \cdot S(f_2).$$

B. HOSTINSKY suppone che S dipenda da un parametro variabile e si propone di estendere alle operazioni come S le proprietà delle matrici funzioni di una variabile reale studiate dal VOLTERRA.

Egli considera due tipi di trasformazioni $g = S(f)$. *Trasformazioni di seconda classe* son quelle del tipo:

$$(I) \quad g(x) = f(x) + \int_a^b K(x, y)f(y)dy,$$

ove $K(x, y)$ è una funzione continua. Se $g(x)$ è una funzione continua assegnata, mentre $f(y)$ è incognita, questa (I) costituisce l'equazione di FREDHOLM di seconda specie. Essa è sempre risolvibile in modo univoco sicchè la (I) ammette la trasformazione inversa $f = S^{-1}(g)$.

Le *trasformazioni di prima classe* son quelle in cui $g = S(f)$ è data da

$$(II) \quad g(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)dy,$$

con $K(x, y)$ assegnata. Questa, in generale, non ammette trasformazione inversa.

Se u è il parametro da cui dipende S (che figurerà nel nucleo K) poichè le trasformazioni di seconda classe ammettono l'inversa, i differenziali sinistro e destro di S si formano subito nei prodotti

$$S_{u+du} \cdot S_u^{-1}, \quad S_u^{-1} \cdot S_{u+du},$$

i quali risultano rispettivamente eguali alle due trasformazioni di seconda specie di nuclei

$$du \left[\frac{\partial K}{\partial u} + \int_a^b \frac{\partial K}{\partial u} \cdot N(x, y, u)dz \right], \quad du \left[\frac{\partial K}{\partial u} + \int_a^b N(x, y, u) \frac{\partial K}{\partial u} dz \right],$$

ove N è il nucleo risolvante di K e $K, \frac{\partial K}{\partial u}$ son funzioni continue di x, y, u ⁽¹⁾. Sopprimendo, in queste, il du , si hanno i nuclei delle derivate sinistra a destra.

Se il nucleo $K(x, y, u)$ è continuo nel dominio $a \leq x \leq b, a \leq y \leq b, s \leq u \leq t$, si divide l'intervallo (s, t) in m intervalli parziali $h_1, \dots, h_m$, si danno m valori $u_1, \dots, u_m$ ad u , presi in detti intervalli, si considerano le m trasformazioni (I) corrispondenti ai nuclei $K(x, y, u_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$ e se ne fa il prodotto. Al limite, quando gli intervalli h_i tendono tutti a zero, si hanno gl'integrali sinistro e destro della (I).

I nuclei di questi integrali son dati da serie del tutto analoghe a quelle che danno gli elementi della sostituzione integrale di una data.

Nel caso in cui il nucleo K non dipende da u , i due integrali destro e sinistro della (I), calcolati da s a t , coincidono: si ricade allora nella soluzione di un'equazione integro-differenziale studiata dal VOLTERRA nel 1914.

Seguono proprietà del tutto analoghe a quelle trovate per le matrici, fra le quali una *formola di addizione*, che traduce la proprietà associativa dell'integrale di VOLTERRA.

Questa formola di addizione dà luogo all'equazione integro-differenziale

$$\frac{\partial \Psi(x, y, s, u)}{\partial u} = K(x, y, u) + \int_a^b K(x, z, u) \Psi(z, y, s, u) dz$$

che s'integra mediante la serie che dà il nucleo dell'integrale della (I).

La trasformazione di partenza (I) risulta eguale alla derivata sinistra (destra) dell'integrale sinistro (destro) della (I) stessa rispetto al limite superiore t .

Per la trasformazione di prima specie (II) le cose procedono in modo sensibilmente diverso. La trasformazione identica e la trasformazione infinitesima, che per la (I) si hanno con $K(x, y, u) = 0$ e con $K(x, y, u)$ infinitesimo, in questo caso si ottengono soltanto con un artificio.

Per formare gl'integrali sinistro e destro della (II), l'A. introduce una moltiplicazione simbolica con l'aiuto di due funzioni $A(x, y, u), k(x, y, u, v)$ definite nel dominio $a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$,

⁽¹⁾ Occorre pure che una certa espressione, indicata nel testo con D_k , sia diversa da zero.

$s \leq u \leq t$, $s \leq v \leq t$, la seconda soddisfacente alla equazione di CHAPMANN

$$k(x, y, u, v) = \int_a^b k(x, z, u, w)k(z, y, w, v)dz, \quad (s \leq u < w < v \leq t)$$

che giuoca un ruolo essenziale nei successivi sviluppi, poichè appare come l'espressione della proprietà associativa di un prodotto di infinite trasformazioni infinitesime, quindi ha una posizione analoga al teorema di addizione per le trasformazioni di seconda classe.

S. CHERUBINO

H. ZASSENHAUS: *Lehrbuch der Gruppentheorie*. Erster Band (Leipzig-Berlin, B. G. Teubner, 1937, pp. VI+151, RM. 3).

L'opera che qui si presenta al lettore è la prima parte di un trattato in tre volumi che lo ZASSENHAUS intende dedicare alla teoria dei gruppi. Con una esposizione, quanto mai concisa e compatta, avvalentesi maestrevolmente dei grandi progressi conseguiti in questo genere di studi da un quindici anni in qua, essa mira a dare delle proprietà generali dei gruppi (finiti o non) una trattazione quanto più è possibile completa ed organica. E basterà che il lettore guardi all'analisi del suo contenuto che passiamo subito ad indicare, per riconoscere come nei cinque capitoli di questo volume estendentesi per non più che 150 pagine compaia una quantità di risultati importanti che invano si cercherebbero in trattati più voluminosi.

Il primo capitolo, dedicato agli elementi della teoria, parte dalla definizione di gruppo per mezzo di postulati; mostra che ogni gruppo (finito o non) può considerarsi come un gruppo di *permutazioni*, cioè di trasformazioni biunivoche sugli elementi di un conveniente insieme; sviluppa il calcolo dei così detti *complessi* o *sistemi* di un gruppo; pone le nozioni fondamentali di sottogruppo (normale o non), di normalizzante, di elementi (o sottogruppi) coniugati e si chiude con una dimostrazione del famoso teorema di FROBENIUS sul numero degli elementi di un gruppo finito le cui potenze con un dato esponente cadano in una determinata classe di elementi coniugati.

Il secondo capitolo pone il concetto di omomorfismo (in particolare di isomorfismo) tra gruppi; dimostra i teoremi fondamentali che lo riguardano; svolge rapidamente la teoria della rappresentazione di un gruppo su gruppi di permutazioni; pone per questi le nozioni di transitività e intransività, primitività o imprimitività.

vità; amplia la nozione di gruppo in quella di gruppo con operatori; dallo studio dell'automorfo e dell'automorfo interno di un gruppo passa alla nozione di gruppi *chiusi* (altri direbbe *completi*), di sottogruppi caratteristici (notevolissimo fra questi il così detto sottogruppo Φ , dovuto al FRATTINI, che conduce al teorema della base) e infine di olomorfo di un gruppo; porge del teorema di JORDAN-HÖLDER-SCHREIER sulle catene e le serie normali la notevolissima dimostrazione che lo ZASSENHAUS stesso ne dette nel decimo volume delle « Hamb. Abhand. »; espone le proprietà dei commutatori, del gruppo da essi generato e delle *forme di commutatori* dovute allo HALL; si chiude con una rapida rassegna dei gruppi che capitano nelle considerazioni algebriche (moduli, anelli, corpi, ecc., ecc.), con che trova modo fra altro di sviluppare le prime proprietà dei corpi finiti e di esporre l'ingegnosissima trovata con la quale il WITT ebbe a semplificare una delle dimostrazioni che lo WEDDERBURN dette del suo teorema sulle algebre primitive nei corpi finiti.

Il terzo capitolo contiene quanto di più generale oggi si conosca sulla costruzione e la struttura dei gruppi composti. Parte dalle proprietà dei prodotti diretti, stabilisce, sotto ipotesi più ampie, il teorema che per i gruppi finiti fu enunciato dallo WEDDERBURN, ma dimostrato rigorosamente per la prima volta dal REMAK; dà del teorema sulla base di un gruppo abeliano finito o infinito, ma generato da un insieme finito di elementi, una dimostrazione ispirata ad un procedimento dello ARTIN; mostra come lo SCHREIER, con l'introduzione dei così detti *sistemi di fattori* abbia risoluto il problema generale dell'*ampliamento*: « *dati due gruppi qualsiansi H e K costruire i gruppi ognuno dei quali possenga un sottogruppo normale isomorfo ad H col relativo gruppo fattoriale isomorfo a K* »; e ne porge applicazioni a due casi particolari, con che si ritrova un ben noto teorema dello HÖLDER.

Nel capitolo quarto, dedicato sopra tutto ai teoremi di SYLOW ed ai *p-gruppi* (cioè ai gruppi aventi per ordine una potenza del numero primo p), per necessità di cose domina quasi sempre l'ipotesi che si tratti di gruppi finiti; ma questa vien lasciata cadere quando si passa a determinare la struttura dei gruppi hamiltoniani.

Il capitolo quinto, esposta la generalizzazione della così detta rappresentazione monomiale costituita da ciò che i tedeschi dicono *Verlagerung* (spostamento) di un gruppo in un sottogruppo, se ne avvale per la deduzione di importanti teoremi del BURNSIDE e del GAUß; caratterizza i gruppi a sottogruppi di SYLOW ciclici e

si chiude con la dimostrazione che nella teoria dei gruppi risponde al così detto *Hauptidealsatz* della teoria dei corpi di classi.

GAETANO SCORZA

G. HAMEL: *Integralgleichungen: Einführung in Lehre und Gebrauch*. Berlin, Springer 1937, pp. 160+VIII, RM. 9.60; geb. 12.

Accenna l'A., nella prefazione, che il libro è originato da un corso di lezioni a un uditorio non di matematici puri: vi si rivela quindi la cura costante di introdurre il lettore nelle idee fondamentali della teoria e nei suoi sviluppi essenziali attraverso esempi familiari o di interesse applicativo e di evitare considerazioni eccessivamente astratte. Si assume così come punto di partenza il problema della corda tesa (condizioni d'equilibrio e corda vibrante) presentandolo parallelamente come dipendente dalla risoluzione di equazioni differenziali e da quella di un'equazione integrale di prima o di seconda specie; e il nucleo di questa è assunto per tutto il volume come *modello* (*Musterkern*) delle successive teorie. Queste si svolgono in due successivi capitoli, o parti, distinte fra loro più che per il contenuto, veramente unitario nel suo insieme, per qualche sfumatura espositiva, che nella prima cerca di appoggiare un po' più sopra i problemi che danno luogo ad equazioni integrali, nella seconda un po' più sopra sviluppi intrinseci. Partendo dal metodo delle approssimazioni successive, il lettore è condotto ordinatamente alla considerazione dei nuclei iterati, degli autovalori e delle autofunzioni, alla nozione di ortogonalità, alla rappresentabilità di una funzione mediante un determinato sistema di funzioni ortogonali e quindi nuovamente ai procedimenti d'integrazione delle equazioni integrali che derivano da questa rappresentazione: sviluppo particolare è dato in tal modo alla teoria di SCHMIDT, presentandone in modo nuovo la riduzione del caso del nucleo asimmetrico ai nuclei simmetrici; pel nucleo asimmetrico è dato anche un breve cenno del più recente procedimento di ENSKOG.

Il libro studia essenzialmente soltanto il caso delle equazioni lineari: solo nell'ultimo paragrafo è trattata una particolare equazione non lineare come applicazione del procedimento delle approssimazioni successive.

Nella preoccupazione già accennata di una facile leggibilità, proposizioni fondamentali sono frequentemente enunciate ed applicate prima che dimostrate; e talune dimostrazioni più delicate sorvolate: ma sempre sono date le indicazioni bibliografiche che consentono al lettore una più profonda informazione. La lettura è facilitata da un indice dei nomi ed uno analitico.

B. LEVI

A. AGOSTINI: *Lezioni di Analisi Matematica*. Vol. II. Tip. Lit. R. Accademia Navale, Livorno, 1937, pp. VIII+376.

Si tratta di un volume a fine propedeutico, che contiene la seconda parte del corso biennale di Analisi, che l'A. svolge già da molti anni presso l'Accademia Navale. Questo secondo tomo ha inizio con la teoria delle serie numeriche, omessa nel primo volume, e contiene, all'incirca, la materia che forma oggetto del secondo corso di Analisi delle nostre Università, fatta eccezione per la teoria dell'integrale per le funzioni di una sola variabile che è stata svolta nella prima parte. Esso presenta gli stessi pregi didattici che già abbiamo rilevato ⁽¹⁾ per il primo volume; l'esposizione è sempre molto chiara e nello stesso tempo efficacemente concisa, i concetti vengono introdotti nel modo più semplice e intuitivo, ma sempre con perfetto rigore, e lo svolgimento della teoria è illustrato da numerosi e facili esempi scelti con particolare cura e perizia.

Fra i numerosi complementi che figurano nell'opera in esame, e che per solito non si trovano negli ordinari corsi di Analisi vanno citate, in primo luogo, alcune formule elementari di analisi vettoriale, di cui l'A. si giova per stabilire i primi teoremi di meccanica analitica. Per altro ci piace mettere in rilievo che la parte essenziale della trattazione viene fatta indipendentemente dal calcolo vettoriale, secondo le classiche direttive dei più noti trattati di Calcolo infinitesimale.

Un altro originale pregio dell'opera è costituito dal fatto che l'A. tratta numerosi problemi, relativi ai diversi rami delle applicazioni (fra cui anche le scienze nautiche) conciliando brillantemente le esigenze dell'analisti con quelle dei tecnici.

Va ancora particolarmente citato l'ultimo capitolo del tomo, dedicato alle serie di FOURIER e alle equazioni a derivate parziali.

I due volumi dell'Analisi dell'AGOSTINI, che risentono della grande esperienza didattica di questo efficace Maestro, noto specialmente quale eminente cultore di Storia delle matematiche, costituiscono un'opera non solo indispensabile agli allievi dell'Accademia Navale, ma anche indicatissima a tutti coloro che desiderano un corso di analisi chiaro e conciso, facile ed esatto.

SILVIO CINQUINI

⁽¹⁾ Vedi « Boll. Unione Matem. Ital. », anno XV (1936), pp. 190-193.

H. ERTEL: *Methoden und Probleme der Dynamischen Meteorologie*. Berlino, Springer, 1938 (in «*Ergebnisse der Math. u. ihrer Grenzgebiete*», Bd. V, Heft 3, pagg. 122).

La meteorologia dinamica consiste nella descrizione (fatta con i metodi della fisica matematica) dei processi dinamici e delle condizioni statiche che si riscontrano nell'atmosfera terrestre. Questo argomento ha già dato occasione a numerosi lavori ed anche ad opere a carattere riassuntivo come l'articolo dell'«*Enciclopedia*» e il trattato di EXNER.

L'A. non si propone questa volta una descrizione completa della materia, ma solo di riferire su alcuni argomenti; quelli; naturalmente, che negli ultimi anni hanno avuto maggiori sviluppi. E vi riesce assai bene descrivendo prima i fondamenti di termodinamica e di idromeccanica, quindi la dinamica dell'atmosfera (generale e speciale) con una cura costante verso i più recenti risultati e dando indicazioni bibliografiche precise e aggiornate.

Il libro, che è esposto con chiarezza, riuscirà molto utile a chi voglia approfondire questo argomento, non molto conosciuto.

G. S.

BIBLIOGRAFIA

Libri ricevuti.

BLASCHKE W. — *Ueber eine Geometrische Frage von Euklid bis Heute*, Leipzig, Teubner, 1938.

GARCIA G. — *Lecciones de Mecanica Racional*. Vol. I: *Teoria de Vectores Cinemática*. Pagg. 308. Lima, Universidad mayor de San Marcos, 1937.

JAHNKE E. — EMDE F. — *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven*. Pagg. XII+305. Leipzig, Teubner, 1938.

MOORE C. N. — *Summable series and convergence factors*. «*Colloquium Publications*», Vol. XXII, pagg. VI+105. New York, American Mathematical Society, 1938.