
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIA CIBRARIO

Sull' esistenza di un integrale doppio

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **17** (1938), n.3, p. 187–190.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_3_187_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_3_187_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1938.

Sull'esistenza di un integrale doppio.

Nota di MARIA CIBRARIO (a Torino).

Sunto. - « Considerato un integrale $z(x, y)$ dell'equazione:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[a(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[b(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + c(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} \right] - f(x, y)z = 0,$$

$$(a \geq 0; \quad c \geq 0; \quad f \geq 0; \quad ac - b^2 \geq 0),$$

definito in un campo limitato D , si dimostra che per la $z(x, y)$ esiste l'integrale:

$$I(z) = \iint_D \left[a \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + c \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + fz^2 \right] dx dy,$$

nell'ipotesi che vi sia una funzione $u(x, y)$, definita in D e ivi soddisfacente certe condizioni, e assumente sul contorno di D gli stessi valori dell'integrale $z(x, y)$, e che esista l'integrale $I(u)$. Si dimostra inoltre che è sempre $I(z) \leq I(u)$.

Sia data la più generale equazione autoaggiunta del secondo ordine:

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[b(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + c(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} \right] - f(x, y)z = 0,$$

dove le a, b, c, f sono definite in un campo limitato D , contorno incluso, e ivi continue e limitate colle loro derivate prime ⁽¹⁾, e soddisfanno in tutto D le disequaglianze:

$$(2) \quad a(x, y) \geq 0; \quad c(x, y) \geq 0; \quad f(x, y) \geq 0; \quad ac - b^2 \geq 0.$$

L'equazione (1) può dunque essere in D ellittica o parabolica o ellittico-parabolica, cioè ellittica in tutto D , tranne in certi punti (o lungo certe curve), in cui è $ac - b^2 = 0$; può darsi pure che vi siano in D punti, in cui a, b, c si annullano contemporaneamente.

Sia $z(x, y)$ un integrale della (1), definita nel campo D , continuo all'interno e sul contorno di D , e avente derivate prime e seconde finite e continue nei punti interni al campo D ; come è ben noto, non è detto che per tale integrale $z(x, y)$ esista l'integrale:

$$(3) \quad I(z) = \iint_D M(z) dx dy,$$

⁽¹⁾ Basta che esistano, siano continue e limitate in D , contorno incluso, le derivate $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}, \frac{\partial c}{\partial y}$.

dove è:

$$(4) \quad M(z) = a \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + c \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + fz^2.$$

Vogliamo qui dimostrare il seguente teorema:

« Se esiste una funzione $u(x, y)$, definita nel dominio D e ivi assolutamente continua, assumente sul contorno di D gli stessi valori dell' integrale $z(x, y)$ e avente derivate prime a quadrato integrabile in D , e se di conseguenza esiste l' integrale $I(u)$, allora esiste pure l' integrale $I(z)$ ed è:

$$I(z) \leq I(u).$$

Nel caso dell'equazione di LAPLACE e dell'integrale di DIRICHLET, il teorema è noto da tempo ⁽²⁾; esso è stato poi dimostrato da me in un lavoro recente ⁽³⁾ per un integrale dell'equazione ellittico-parabolica:

$$k^2 y^{2k-2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Si riprende qui, con qualche modificazione, la dimostrazione, data in tale lavoro, estendendola all'equazione (1); la natura, molto generale, di tale equazione e del risultato così ottenuto mi fa sembrare di qualche interesse questa estensione.

Posto:

$$(5) \quad u(x, y) = z(x, y) + w(x, y),$$

le $w(x, y)$ risulta continua in tutto D e nulla sul contorno di D . Si scomponga il dominio D nei tre insiemi A, B, C , in cui è, rispettivamente:

$$w(x, y) > 0; \quad w(x, y) < 0; \quad w(x, y) = 0.$$

Poichè in C è $z(x, y) = u(x, y)$, è anche:

$$(6) \quad \iint_C M(z) dx dy = \iint_C M(u) dx dy.$$

Sia ora $\{h_n\}$ una successione decrescente di numeri positivi e sia $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$.

Sia A_n il campo formato dai punti, in cui è $w(x, y) > h_n$; esso

⁽²⁾ V. per esempio: R. COURANT, *Ueber die Existenztheoreme der Potential- und Funktionentheorie*, « Journ. f. Math. », B. 144 (1914), pp. 190-211; v. in particolare § 1, « Hilfssatz » III, pp. 194-196.

⁽³⁾ M. CIBRARIO, *Il principio di minimo e le equazioni di tipo misto ellittico-paraboliche*, « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », t. LXI, anno 1937-XVI. V. per questo il § 3, Lemma.

è costituito di punti *tutti interni al dominio* D ; dunque le derivate $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, e perciò anche le $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ sono a quadrato integrabile in A_n . Dalla (5) segue:

$$(7) \iint_{A_n} M(u) dx dy = \iint_{A_n} M(z) dx dy + \iint_{A_n} M(v) dx dy + 2 \iint_{A_n} M(z, v) dx dy,$$

dove si è posto:

$$(8) \quad M(z, v) = a \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + b \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + c \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + f z v.$$

Se in A_n si pone:

$$v(x, y) = w(x, y) - h_n,$$

in A_n è $v(x, y) > 0$, e $v(x, y) = 0$ sul contorno di A_n .

In A_n le funzioni

$$\left(a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} \right) v(x, y), \quad \left(b \frac{\partial z}{\partial x} + c \frac{\partial z}{\partial y} \right) v(x, y)$$

sono assolutamente continue e nulle al contorno; è dunque (*):

$$\iint_{A_n} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} \right) v(x, y) \right] dx dy = 0,$$

$$\iint_{A_n} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(b \frac{\partial z}{\partial x} + c \frac{\partial z}{\partial y} \right) v(x, y) \right] dx dy = 0,$$

da cui segue subito, tenendo conto della (8):

$$\begin{aligned} & \iint_{A_n} M(z, v) dx dy = \\ & - \iint_{A_n} v(x, y) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(b \frac{\partial z}{\partial x} + c \frac{\partial z}{\partial y} \right) - f z \right] dx dy, \end{aligned}$$

e poichè $z(x, y)$ è, per ipotesi, un integrale della (1):

$$\iint_{A_n} M(z, v) dx dy = 0,$$

Ma

$$M(z, v) = M(z, v) + f(x, y) h_n z;$$

(*) Se una funzione $F(x, y)$ è assolutamente continua in un campo μ è nulla sul contorno di μ , è:

$$\iint_{\mu} \frac{\partial F}{\partial x} dx dy = 0; \quad \iint_{\mu} \frac{\partial F}{\partial y} dx dy = 0.$$

(V.: M. CIBRARIO, loc. cit. nella nota (3); v. in particolare il § 3, nota 1

dunque dalla (7) segue:

$$\iint_{A_n} M(z) dx dy + \iint_{A_n} M(w) dx dy = \iint_{A_n} M(u) dx dy - 2h_n \iint_{A_n} f(x, y) z(x, y) dx dy.$$

Per ipotesi le funzioni $f(x, y)$, $z(x, y)$ sono continue e limitate in D ; poichè il campo A_n è una parte di D , è:

$$\left| \iint_{A_n} f(x, y) z(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y) z(x, y)| dx dy = H,$$

dove H è un numero ben determinato. Si trova così che:

$$(9) \quad \iint_{A_n} M(z) dx dy \leq \iint_{A_n} M(u) dx dy + 2Hh_n \leq \iint_A M(u) dx dy + 2Hh_n,$$

perchè per le ipotesi fatte l'espressione $M(u)$ è positiva o nulla in tutto il campo D e integrabile in D , e il campo A_n è contenuto in A , che è una parte di D .

Al crescere di n l'integrale a primo membro della disuguaglianza (9) cresce, ma non illimitatamente, perchè esso non può superare il secondo membro, che è limitato, essendo per ipotesi $0 < h_n < h_1$. Al tendere di n a infinito, il campo A_n tende al campo A , e h_n tende a zero. Esiste dunque:

$$\iint_A M(z) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{A_n} M(z) dx dy,$$

ed è:

$$(10) \quad \iint_A M(z) dx dy \leq \iint_A M(u) dx dy.$$

Analogamente si prova che:

$$(11) \quad \iint_B M(z) dx dy \leq \iint_B M(u) dx dy.$$

Poichè il campo D è stato scomposto nelle tre parti A , B , C , dalle (6), (10) e (11) segue subito che:

$$\iint_D M(z) dx dy \leq \iint_D M(u) dx dy,$$

cioè che esiste $I(z)$ ed è:

$$I(z) \leq I(u).$$

Il teorema è così completamente dimostrato.