
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUIGI GRASSI

Su di un recente teorema del prof. Dario Graffi sui sistemi oscillanti dissipativi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol.
17 (1938), n.3, p. 182–186.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_3_182_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Su di un recente teorema del prof. Dario Graffi
sui sistemi oscillanti dissipativi.**

Nota di LUIGI GRASSI (a Pisa).

Sunto. - *Si esamina la natura delle radici dell'equazione caratteristica di un sistema meccanico dissipativo a due gradi di libertà e si mostra come i risultati ottenuti si possono applicare ad un recente teorema del prof. GRAFFI.*

1. In una recente Nota ⁽¹⁾ il prof. GRAFFI dimostra l'esistenza di un limite superiore finito per la frequenza e lo smorzamento dei sistemi oscillanti dissipativi.

⁽¹⁾ DARIO GRAFFI, *Un limite superiore per la frequenza e lo smorzamento dei sistemi oscillanti dissipativi.* « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », n. 1, 15 febbraio 1938.

Nel caso particolare di un sistema a due gradi di libertà può essere interessante conoscere quali condizioni debbano essere verificate affinchè il moto del sistema sia oscillatorio.

Precisando le cose, si considera un sistema meccanico ad n gradi di libertà, olonomo ed a vincoli indipendenti dal tempo, che compie, in presenza di forze dissipative, piccole oscillazioni libere intorno ad una configurazione di equilibrio stabile.

La forza viva T , l'energia potenziale $-V$ e la funzione di dissipazione F si possono considerare come forme quadratiche definite positive a coefficienti costanti.

Il moto del sistema è retto da un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine, omogenee ed a coefficienti costanti, uguali in numero al grado di libertà del sistema meccanico. La sua equazione caratteristica, di grado uguale al doppio del grado di libertà del sistema meccanico, può avere radici reali negative o complesse con parte reale negativa, e dalla natura di queste radici dipende la natura del moto più generale del sistema.

Ora il GRAFFI si pone nell'ipotesi che nell'integrale generale del sistema tutti i termini siano oscillatori, ossia che le radici dell'equazione caratteristica del sistema siano tutte complesse coniugate; inoltre suppone già ridotte a forma canonica le forme quadratiche esprimenti la funzione di dissipazione e l'energia potenziale.

2. Per un sistema a due gradi di libertà l'equazione caratteristica è un'equazione di quarto grado; quindi può avere due coppie di radici complesse coniugate, oppure tutte e quattro le radici reali, oppure una coppia di radici complesse coniugate e due radici reali. Ora si può riconoscere dalle relazioni intercedenti fra i coefficienti delle tre forme quadratiche T , $-V$ e F , se l'equazione caratteristica abbia o no tutte le radici complesse coniugate, e quindi se è verificata l'ipotesi in cui si pone il GRAFFI per ottenere il risultato ricordato in principio.

In una precedente Memoria ⁽¹⁾ ho discusso la natura delle radici dell'equazione caratteristica di un sistema a due gradi di libertà giungendo ad enunciare criteri di sufficienza per poter riconoscere la realtà o complessità di tali radici, e quindi la natura del moto del sistema. Ho svolto la discussione supponendo già ridotte a forma canonica la forza viva e la funzione di dissi-

⁽¹⁾ *Moto libero smorzato dei sistemi a due gradi di libertà.* « Annali di Matematica », serie IV, tomo XVI (1937).

pazione (§§ 3-7) o la forza vivá e l'energia potenziale (§ 8). Infatti con un'unica sostituzione lineare propria, a coefficienti reali, sulle coordinate lagrangiane si può sempre ridurre simultaneamente a forma canonica due delle tre forme quadratiche T , $-V$ e F . Inoltre, in molti problemi pratici, tale riduzione a forma canonica è già effettuata.

Non ho trattato il caso della riduzione simultanea a forma canonica delle forme quadratiche $-V$ e F ; ma la cosa non presenta difficoltà bastando modificare opportunamente i risultati ottenuti ai §§ 3-7 della mia Memoria. Infatti in questo caso l'equazione caratteristica assume la forma:

$$f(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \mu^2 + \varepsilon_1\mu + b_1 & b_{12} \\ b_{12} & \mu^2 + \varepsilon_2\mu + b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

e la discussione si svolge in base alla considerazione del gruppo di curve:

$$(A) \quad \begin{cases} y_1 = (\mu^2 + \varepsilon_1\mu + b_1)(\mu^2 + \varepsilon_2\mu + b_2), & y_2 = b_{12}^2, \\ z_1 = \mu^2 + \varepsilon_1\mu + b_1, & z_2 = \mu^2 + \varepsilon_2\mu + b_2. \end{cases}$$

Nel caso attuale della riduzione a forma canonica delle forme quadratiche $-V$ e F l'equazione caratteristica è invece:

$$F(\mu) \equiv \begin{vmatrix} a_1\mu^2 + \varepsilon_1\mu + 1 & a_{12}\mu^2 \\ a_{12}\mu^2 & a_2\mu^2 + \varepsilon_2\mu + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

e la discussione si svolge in base alla considerazione del gruppo di curve:

$$(B) \quad \begin{cases} Y_1 = \left(\frac{a_1\mu^2 + \varepsilon_1\mu + 1}{\mu^2} \right) \left(\frac{a_2\mu^2 + \varepsilon_2\mu + 1}{\mu^2} \right), & Y_2 = a_{12}^2, \\ Z_1 = \frac{a_1\mu^2 + \varepsilon_1\mu + 1}{\mu^2}, & Z_2 = \frac{a_2\mu^2 + \varepsilon_2\mu + 1}{\mu^2}. \end{cases}$$

Ora le differenze fra i due gruppi di curve (A) e (B) non conducono a modificare sostanzialmente il metodo di discussione svolto nella mia Memoria; anzi per il caso attuale si può svolgere la discussione in modo perfettamente analogo a quello usato nel caso della riduzione simultanea a forma canonica di T e F . Inoltre, in via di massima, si può affermare che si ritroverebbero, salvo lievi modificazioni, i risultati fondamentali dei §§ 3-7 della citata Memoria, con la sola sostituzione in quelle formule dei coefficienti b_1 , b_2 e b_{12} con i coefficienti a_1 , a_2 , a_{12} . Infatti i due casi si ricon-

ducono l'uno all'altro con il solo scambio delle forme quadratiche T e $-V$.

3. Passiamo ora ad esporre brevemente i principali risultati che si ottengono nel caso della riduzione simultanea a forma canonica delle forme quadratiche $-V$ e F .

1°) *Condizione necessaria, ma non sufficiente, affinché l'equazione caratteristica abbia due coppie di radici complesse coniugate è che sia:* $\varepsilon_1^2 < 4a_1$, $\varepsilon_2^2 < 4a_2$.

2°) *Condizioni sufficienti affinché per* $\varepsilon_1^2 \geq 4a_1$, $\varepsilon_2^2 \geq 4a_2$ *l'equazione caratteristica abbia quattro radici reali:*

Per $a_1 \geq a_2$, $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ una condizione sufficiente è espressa da:

$$(1) \quad (\varepsilon_1^2 - 4a_1)(2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1^2 - 4a_2) \geq 16a_{12}^2;$$

per $a_2 \geq a_1$, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ da:

$$(2) \quad (\varepsilon_2^2 - 4a_2)(2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2^2 - 4a_1) \geq 16a_{12}^2.$$

Sia ora $a_1 > a_2$, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Per $|\mu_1| > |\mu_3|$, o per $|\mu_2| > |\mu_4|$ ⁽¹⁾ valgono ancora le condizioni (1) e (2).

Se le precedenti disuguaglianze fra le $|\mu_1|$, $|\mu_2|$, $|\mu_3|$ e $|\mu_4|$ non sono verificate una condizione sufficiente è espressa da:

$$(3) \quad \left| \left(\frac{a_1 - a_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \right)^2 + \frac{\varepsilon_1 a_2 - \varepsilon_2 a_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \right| \geq |a_{12}|.$$

Notiamo che per $|\mu_4| > |\mu_2| > |\mu_3| > |\mu_1|$, cioè per $(a_1 - a_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 a_2 - \varepsilon_2 a_1) < 0$, possono anche essere verificate le condizioni sufficienti (1) e (2). Se invece sono verificate le disuguaglianze $a_2 > a_1$, $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ vale ancora quanto si è visto per $a_1 > a_2$, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, basta scambiare a_1 con a_2 e ε_1 con ε_2 .

3°) *Condizione sufficiente affinché per* $\varepsilon_1^2 < 4a_1$, $\varepsilon_2^2 < 4a_2$ *l'equazione caratteristica abbia due coppie di radici complesse coniugate è che sia:*

$$(4) \quad (4a_1 - \varepsilon_1^2)(4a_2 - \varepsilon_2^2) \geq 16a_{12}^2.$$

4°) *Condizioni sufficienti affinché l'equazione caratteristica abbia due radici reali ed una coppia di radici complesse coniugate.*

Sia dapprima $\varepsilon_1^2 \geq 4a_1$, $\varepsilon_2^2 \geq 4a_2$. Per $|\mu_4| \geq |\mu_3| > |\mu_2| \geq |\mu_1|$,

⁽¹⁾ Indichiamo con $|\mu_1|$, $|\mu_2|$, $|\mu_3|$ e $|\mu_4|$ rispettivamente le radici delle equazioni $a_1\mu^2 + \varepsilon_1\mu + 1 = 0$, $a_2\mu^2 + \varepsilon_2\mu + 1 = 0$.

o per $\mu_2 \geq |\mu_1| > |\mu_4| \geq |\mu_3|$ una condizione sufficiente è espressa da:

$$(5) \quad 16a_{12}^2 \geq (\varepsilon_2^2 + 4a_1 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2)(\varepsilon_1^2 + 4a_2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2);$$

altrimenti da:

$$(6) \quad 16a_{12}^2 \geq (\varepsilon_1^2 - 4a_1)(\varepsilon_2^2 - 4a_2).$$

Per $\varepsilon_1^2 < 4a_1$, $\varepsilon_2^2 < 4a_2$, o $\varepsilon_1^2 \geq 4a_1$, $\varepsilon_2^2 < 4a_2$, o $\varepsilon_1^2 < 4a_1$, $\varepsilon_2^2 \geq 4a_2$, sussiste ancora la condizione sufficiente (4).

5°) Sia: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $a_1 \neq a_2$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché per $\varepsilon_1^2 \geq 4a_1$, $\varepsilon_1^2 \geq 4a_2$ l'equazione caratteristica abbia quattro radici reali, o per $\varepsilon_1^2 < 4a_1$, $\varepsilon_1^2 < 4a_2$, abbia due coppie di radici complesse coniugate è che sia:

$$(7) \quad (\varepsilon_1^2 - 4a_1)(\varepsilon_1^2 - 4a_2) > 16a_{12}^2.$$

Se questa disuguaglianza non è verificata l'equazione caratteristica ha due radici reali ed una coppia di radici complesse coniugate. Infine per $\varepsilon_1^2 \geq 4a_2$, $\varepsilon_1^2 < 4a_2$, o per $\varepsilon_1^2 < 4a_1$, $\varepsilon_1^2 \geq 4a_2$, l'equazione caratteristica ha due radici reali ed una coppia di radici complesse coniugate.

Osserviamo che questo caso particolare è interessante anche per il suo significato fisico, infatti si presenta quando lo smorzamento è individuato da un solo coefficiente ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$).

Dalla discussione precedente segue che il verificarsi delle disuguaglianze $\varepsilon_1^2 < 4a_1$, $\varepsilon_2^2 < 4a_2$ fornisce una condizione necessaria, ma non sufficiente, per il verificarsi dell'ipotesi del GRAFFI; la (4) fornisce poi una condizione sufficiente.

Nel caso particolare in cui lo smorzamento è individuato da un solo coefficiente si può giungere ad enunciare la condizione necessaria e sufficiente per il verificarsi del caso GRAFFI.

Infine è interessante notare che per riconoscere se si è o no nell'ipotesi del GRAFFI basta avere ridotto a forma canonica due qualunque delle tre forme quadratiche T , $-V$ e F . Infatti l'aver o no l'equazione caratteristica tutte le radici complesse coniugate rispecchia una proprietà fisica del moto del sistema meccanico, e cioè la sua periodicità o aperiodicità. Ne segue che qualunque coppia delle tre forme fondamentali si riduca simultaneamente a forma canonica, la natura delle radici della corrispondente equazione caratteristica non varia.