
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

IDA GROPPI

A proposito di alcuni criteri di confronto per le equazioni differenziali del secondo ordine

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 17 (1938), n.3, p. 179–182.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_3_179_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_3_179_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1938.

**A proposito di alcuni criteri di confronto
per le equazioni di differenziali del secondo ordine.**

Nota di IDA GROPPi (a Trieste).

Sunto - *In questa Nota si danno condizioni sufficienti perchè da $y_1(a) \leq y_2(a)$, $y_1(b) \leq y_2(b)$ segua $y_1(x) \leq y_2(x)$ in tutto $a \leq x \leq b$, y_1 e y_2 essendo soluzioni di due equazioni differenziali del 2° ordine di tipo normale.*

Per le due equazioni

$$y''(x) = f(x, y, y'), \quad y''(x) = g(x, y, y')$$

con $f, g, f_y', g_y', f_{y'}', g_{y'}'$, continue nello strato

$$S: \quad a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < y' < \infty$$

e verificanti le

$$\begin{aligned} f(x, y, y') &\leq g(x, y, y') \\ f_y(x, y, y') &\geq 0, \quad g_y(x, y, y') \geq 0, \end{aligned}$$

si sa ⁽¹⁾ che se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due loro rispettivi integrali verificanti le

$$(1) \quad y_1(a) \geq y_2(a), \quad y_1(b) \geq y_2(b),$$

allora

$$(2) \quad y_1(x) \geq y_2(x), \quad (a \leq x \leq b).$$

Questo criterio comprende come caso particolare il seguente teorema:

L'unicità di un integrale $y(x)$ della

$$y'' = f(x, y, y')$$

verificante le condizioni

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

è assicurata se $f(x, y, y')$ è continua con le sue derivate $f_y(x, y, y')$ e $f_{y'}(x, y, y')$ nello strato S ed è non decrescente rispetto alla y ⁽²⁾.

Ora è noto che questo teorema di unicità vale anche se, sopprimendo ogni ipotesi circa le derivate di f , si suppone f crescente rispetto a y oppure non decrescente rispetto y e monotona rispetto y' ⁽³⁾.

In questa Nota mi propongo di mostrare come i ragionamenti, che permettono di ottenere questi ultimi risultati, si prestino a sostituire le condizioni che compaiono nel criterio di confronto ricordato con uno dei seguenti gruppi di ipotesi:

$$(I) \quad f(x, y, y') < g(x, y, y')$$

⁽¹⁾ Il criterio è di M. PICONE e si trova enunciato nella Memoria di C. MIRANDA, *Teoremi e metodi per l'integrazione numerica della equazione differenziale di Fermi*, « Reale Accademia d'Italia », vol. V, pag. 21.

⁽²⁾ R. CACCIOPOLI, *Problemi non lineari in analisi funzionale*, « Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma », serie III, vol. I, pag. 20.

⁽³⁾ G. SCORZA DRAGONI, *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per gli integrali di una equazione differenziale del secondo ordine*, « Giornale di matematiche di Battaglini », vol. 69, §§ 6, 7; *A proposito di alcuni teoremi relativi ad un problema ai limiti per una equazione differenziale del secondo ordine*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », serie III, vol. XII, pag. 44.

li f e g una almeno non decrescente rispetto ad y ;

$$(II) \quad f(x, y, y') \leq g(x, y, y')$$

ed f (o g) crescente rispetto ad y ;

$$(III) \quad f(x, y, y') \leq g(x, y, y')$$

ed f (oppure g) non decrescente rispetto ad y e monotona rispetto ad y' .

1. Esaminiamo il primo caso supponendo la f non decrescente rispetto ad y .

Poichè valgono le

$$(1) \quad y_1(a) \geq y_2(a), \quad y_1(b) \geq y_2(b),$$

se in tutto (a, b) non è vera la

$$(2) \quad y_1(x) \geq y_2(x)$$

si potranno sempre trovare almeno due punti a_1, b_1 tali che

$$(3) \quad y_1(x) < y_2(x) \quad \text{se} \quad a_1 < x < b_1$$

e in maniera che in $a_1 \leq x \leq b_1$ esistano due punti $x_1 < x_2$ dove

$$(4) \quad y_1'(x_1) < y_2'(x_1), \quad y_1'(x_2) > y_2'(x_2).$$

Poichè $y_1'(x)$ e $y_2'(x)$ sono funzioni continue, da tali disuguaglianze segue che nell'intervallo $x_1 < x < x_2$ vi deve essere almeno un punto dove le due funzioni sono uguali.

Sia ξ il primo punto, procedendo da x_1 verso x_2 , dove

$$(5) \quad y_1'(\xi) = y_2'(\xi).$$

Nell'intervallo $x_1 \leq x < \xi$ varranno allora le

$$(6) \quad y_1(x) < y_2(x), \quad y_1'(x) < y_2'(x),$$

mentre per le ipotesi fatte sulla f si ha

$$y_1''(\xi) = f(\xi, y_1(\xi), y_1'(\xi)) \leq f(\xi, y_2(\xi), y_2'(\xi)) < g(\xi, y_2(\xi), y_2'(\xi)) = y_2''(\xi);$$

ciò che unito alla (5) ci permette di affermare che in un intorno sinistro di ξ è

$$y_1'(x) > y_2'(x)$$

il che contraddice la seconda delle (6).

Analogo ragionamento vale se f è funzione crescente di y ed è $f \leq g$.

2. Supponiamo ora $f \leq g$ ed f non decrescente rispetto ad y e monotona rispetto a y' .

Se f è non decrescente rispetto ad y e y' si scelgano come sopra

i punti a_1, b_1, x_1, x_2 e ξ . Nell'intervallo $x_1 \leq x < \xi$ varranno ancora le

$$y_1(x) < y_2(x), \quad y_1'(x) < y_2'(x),$$

da cui, in tutto $x_1 \leq x \leq \xi$,

$$y_1''(x) = f(x, y_1(x), y_1'(x)) \leq f(x, y_2(x), y_2'(x)) \leq g(x, y_2(x), y_2'(x)) = y_2''(x);$$

mentre dalle

$$y_1'(x_1) < y_2'(x_1), \quad y_1'(\xi) = y_2'(\xi)$$

segue che vi deve essere almeno un punto di detto intervallo dove

$$y_1''(x) > y_2''(x).$$

Se f è non decrescente rispetto y e non crescente rispetto y' si scelgono ancora come sopra i punti a_1, b_1, x_1, x_2 , mentre η sarà il primo punto procedendo da x_2 verso x_1 dove

$$(7) \quad y_1'(\eta) = y_2'(\eta);$$

in $\eta < x \leq x_2$ sarà allora

$$y_1(x) < y_2(x), \quad y_1'(x) > y_2'(x),$$

da cui in tutto $\eta \leq x \leq x_2$

$$y_1''(x) = f(x, y_1(x), y_1'(x)) \leq f(x, y_2(x), y_2'(x)) \leq g(x, y_2(x), y_2'(x)) = y_2''(x),$$

mentre dalla (7) unita alla $y_1'(x_2) > y_2'(x_2)$ segue che in almeno un punto deve essere

$$y_1''(x) > y_2''(x).$$

Analoghi ragionamenti valgono se si fanno sulla g le ipotesi fatte sulla f .

Le nostre affermazioni sono così completamente dimostrate.