
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LETTERIO TOSCANO

Sui determinanti circolanti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **17** (1938), n.3, p. 170–179.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_3_170_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_3_170_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Sui determinanti circolanti.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

Sunto. - *L'Autore, continuando precedenti ricerche, calcola le radici di alcune equazioni a matrice circolante di tipo (ω); particolarmente a matrice circolante ($\omega = 1$) e gobbo-circolante ($\omega = -1$).*

1. Nella mia precedente Nota *L'equazione secolare a matrice circolante* ⁽¹⁾ ho calcolato le radici dell'equazione secolare

$$\Phi_n(x) = \begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 - x & a_4 & \dots & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} - x \end{vmatrix} = 0.$$

Seguendo lo stesso metodo si possono pure calcolare le radici di altre equazioni a matrice circolante, gobbo-circolante, o più in

⁽¹⁾ « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », serie 6^a, vol. XXV, 1° sem. 1937.

generale a matrice circolante di tipo (ω) ⁽²⁾, e ciò sarà fatto in questa Nota, ritrovando in casi particolari quelli della Nota già citata e dall'altra mia su *Una equazione a matrice circolante* ⁽³⁾.

2. Ricerchiamo dapprima le radici dell'equazione

$$\Phi(x) = \begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 - \alpha_r x & a_4 & \dots & a_n & \omega a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 - \alpha_r^2 x & \dots & \omega a_1 & \omega a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & \omega a_1 & \omega a_2 & \dots & \omega a_{n-1} & \omega a_n - \alpha_r^{n-1} x \end{vmatrix} = 0$$

$$\cos \omega = \pm 1 \quad \text{e} \quad \alpha_r = \cos \frac{2r\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2r\pi}{n} \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

Sia λ una radice della $\Phi(x) = 0$: allora sarà possibile soddisfare il sistema

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccccccc} \alpha_1 x_1 & + \alpha_2 x_2 & + \alpha_3 x_3 & + \dots & + \alpha_{n-1} x_{n-1} & + \alpha_n x_n & = & \lambda x_1 \\ \alpha_2 x_1 & + \alpha_3 x_2 & + \alpha_4 x_3 & + \dots & + \alpha_n x_{n-1} & + \omega \alpha_1 x_n & = & \lambda \alpha_1 x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \alpha_n x_1 & + \omega \alpha_1 x_2 & + \omega \alpha_2 x_3 & + \dots & + \omega \alpha_{n-2} x_{n-1} & + \omega \alpha_{n-1} x_n & = & \lambda \alpha_{n-1} x_n \end{array}$$

con valori non tutti nulli delle $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Posto

$$\varphi(y) = a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + \dots + a_n y^{n-1}$$

e denotando con ε_s la radice n -esima di $\omega = \pm 1$, uguale ad α_s per $\omega = 1$ e a $\beta_s = \cos \frac{(2s+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2s+1)\pi}{n}$ ($s = 1, 2, \dots, n$) per $\omega = -1$, si ha:

[illegible]

(²) V. AMATO: *Sui gobbo-circolanti* (« Note e Memorie di Matematica », vol. I, 1921); *I gobbo-circolanti e i divisori di zero di un particolare sistema di numeri complessi ad n unità* (« Annali di Matematica », serie 3^a, tomo XXXI); *Sui circolanti e gobbo-circolanti* (« Memorie R. Acc. di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali », serie 4^a, vol. II, 1924-25); *Su alcune proprietà dei circolanti di tipo (ω)* (« Note ed Esercitazioni Matematiche », vol. V, fasc. II, 1927); *Sui circolanti a matrici, di tipo (ω)* (« Boll. Acc. Gioenia in Catania », fasc. LXV, serie 2^a, 1933).

(3) « Boll. Un. Mat. Italiana », anno XIV, 1935.

Ciò fissato, moltiplichiamo le n equazioni del sistema (1) rispettivamente per $1, \varepsilon_s, \varepsilon_s^2, \dots, \varepsilon_s^{n-1}$ e sommiamo tenendo presente le (2); si ha:

$$\lambda[x_1 + x_2 \alpha_r \varepsilon_s + x_3 \alpha_r^2 \varepsilon_s^2 + \dots + x_{n-1} \alpha_r^{n-2} \varepsilon_s^{n-2} + x_n \alpha_r^{n-1} \varepsilon_s^{n-1}] = \\ = \varphi(\varepsilon_s) \left[x_1 + x_2 \frac{1}{\varepsilon_s} + x_3 \frac{1}{\varepsilon_s^2} + \dots + x_{n-1} \frac{1}{\varepsilon_s^{n-2}} + x_n \frac{1}{\varepsilon_s^{n-1}} \right]$$

ovvero

$$(3) \quad \lambda f(\alpha_r \varepsilon_s) = \varphi(\varepsilon_s) f\left(\frac{1}{\varepsilon_s}\right)$$

con $f(y) = x_1 + x_2 y + x_3 y^2 + \dots + x_n y^{n-1}$.

Supposto ora $\omega = 1$ si ha $\varepsilon_s = \alpha_s$ e la precedente (3) diventa

$$(4) \quad \lambda f(\alpha_{r+s}) = \varphi(\alpha_s) f(\alpha_{n-s}).$$

Inoltre, come già si è dimostrato in (1), le espressioni $f(\alpha_i)$ sono diverse da zero.

Ed allora per $s = \frac{n-r}{2}$ con n ed r entrambi pari o dispari si ha la radice

$$\lambda = \varphi\left(\frac{\alpha_{n-r}}{2}\right),$$

per $s = n - \frac{r}{2}$ con r pari si ha la radice

$$\lambda = \varphi\left(\alpha_{n-\frac{r}{2}}\right),$$

mentre moltiplicando la (4) per l'altra analoga

$$\lambda f(\alpha_{n-s}) = \varphi(\alpha_{n-r-s}) f(\alpha_{r+s})$$

si ricava

$$\lambda^2 = \varphi(\alpha_s) \varphi(\alpha_{n-r-s}),$$

da cui risultano le altre radici.

Concludendo: L'equazione $\Phi(x) = 0$ a matrice circolante ammette la radice

$$\lambda = \varphi\left(\frac{\alpha_{n-r}}{2}\right)$$

per n ed r entrambi pari o dispari, la radice

$$\lambda = \varphi\left(\alpha_{n-\frac{r}{2}}\right)$$

per r pari, e in ogni caso le altre radici sono date da

$$\lambda^2 = \varphi(\alpha_s) \varphi(\alpha_{n-r-s}).$$

Nell'altro caso, $\omega = -1$, si ha

$$\alpha_r \varepsilon_s = \alpha_r \beta_s = \beta_{r+s}, \quad \beta_r \beta_s = \alpha_{r+s+1},$$

Concludendo: L'equazione $\Phi(x) = 0$, a matrice gobbo-circolante, ammette la radice

$$\lambda = \varphi\left(\beta_{\frac{n-r-1}{2}}\right)$$

per n ed r non entrambi pari o dispari, la radice

$$\lambda = \varphi\left(\beta_{n-\frac{r+1}{2}}\right)$$

per r dispari, e in ogni caso le altre radici sono date da

$$\lambda^2 = \varphi(\beta_s)\varphi(\beta_{n-r-s-1}).$$

3. L'equazione $\Phi(x) = 0$ diventa particolarmente notevole quando $r = 0$, e in tale ipotesi passiamo ad assegnare le formule esplicite di risoluzione.

Con φ_{hk} ($h < k$) denotiamo la somma dei prodotti degli elementi corrispondenti delle orizzontali di indici h e k del circolante di tipo (ω)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & \omega a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & \omega a_1 & \dots & \omega a_{n-2} & \omega a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \varphi_{hk} = & a_h a_k + a_{h+1} a_{k+1} + \dots + a_{n-(k-h)} a_n + \omega a_{n-(k-h)+1} a_1 + \\ & + \omega a_{n-(k-h)+2} a_2 + \dots + \omega a_n a_{k-h} + \omega^2 a_1 a_{k-h+1} + \omega^2 a_2 a_{k-h+2} + \dots \\ & \dots + \omega^2 a_{h-1} a_{k-1}. \end{aligned}$$

da cui

$$\varphi_{hk} = \varphi_{1, k-h+1} = \omega \varphi_{1, n-(k-h)+1},$$

e per brevità indichiamo $\varphi_{1, m}$ con φ_m .

Con tali notazioni, indicando con ε_s il coniugato di ε_s ed osservando che

$$\varepsilon_s r + \bar{\varepsilon}_s r = \omega(\varepsilon_s^{n-r} + \bar{\varepsilon}_s^{n-r}),$$

si ha

$$\varphi(\varepsilon_s)\varphi(\bar{\varepsilon}_s) = \varphi_1 + \varphi_2(\varepsilon_s + \bar{\varepsilon}_s) + \varphi_3(\varepsilon_s^2 + \bar{\varepsilon}_s^2) + \dots$$

$$\dots + \varphi_v(\varepsilon_s^{v-1} + \bar{\varepsilon}_s^{v-1}) + \frac{1}{2} \varphi_{v+1}(\varepsilon_s^v + \bar{\varepsilon}_s^v) \quad \text{per } n = 2v.$$

e

$$\varphi(\varepsilon_s)\varphi(\bar{\varepsilon}_s) = \varphi_1 + \varphi_2(\varepsilon_s + \bar{\varepsilon}_s) + \varphi_3(\varepsilon_s^2 + \bar{\varepsilon}_s^2) + \dots + \varphi_{v+1}(\varepsilon_s^v + \bar{\varepsilon}_s^v) \quad \text{per } n = 2v+1.$$

Allora per $\omega = 1$ si hanno le formule risolutive già fissate nella citata nota (1), e per $\omega = -1$ aggiungiamo che le radici dell'equa-

zione $\Phi(x) = 0$ sono date dalla

$(n, -1, 0)$

$$\lambda^2 = \varphi_1 + 2\varphi_2 \cos \frac{(2s+1)\pi}{2\nu} + 2\varphi_3 \cos \frac{(2s+1)2\pi}{2\nu} + \dots$$

$$\dots + 2\varphi_\nu \cos \frac{(2s+1)(\nu-1)\pi}{2\nu} \quad (s = 0, 1, \dots, \nu-1)$$

per $n = 2\nu$, e dalle

$$\lambda = a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_n$$

$$\lambda^2 = \varphi_1 + 2\varphi_2 \cos \frac{(2s+1)\pi}{2\nu+1} + 2\varphi_3 \cos \frac{(2s+1)2\pi}{2\nu+1} + \dots$$

$$\dots 2\varphi_{\nu+1} \cos \frac{(2s+1)\nu\pi}{2\nu+1} \quad (s = 0, 1, \dots, \nu-1)$$

per $n = 2\nu + 1$.

Così

$$\pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

sono le radici della $\Phi(x) = 0$;

$(2, -1, 0)$

$$a_1 - a_2 + a_3, \pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_1 a_2 + a_2 a_3 - a_1 a_3}$$

della $\Phi(x) = 0$;

$(3, -1, 0)$

$$\pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \pm (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 - a_1 a_4)} \sqrt{2}$$

della $\Phi(x) = 0$;

$(4, -1, 0)$

$$\pm \sqrt{\varphi_1 \pm \varphi_2 \sqrt{3 + \varphi_3}}, \quad \pm \sqrt{\varphi_1 - 2\varphi_3}$$

della $\Phi(x) = 0$.

$(6, -1, 0)$

4. I risultati del n. 2 si possono ancora ottenere moltiplicando il determinante a primo membro della $\Phi(x) = 0$ per l'altro

(n, ω, n)

$$\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \dots & \varepsilon_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon_n & \varepsilon_n^2 & \dots & \varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Infatti eseguendo il prodotto per orizzontali si ricava il determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi(\varepsilon_1) - x & \bar{\varepsilon}_1 \varphi(\varepsilon_1) - \alpha_{\varepsilon_1} x & \dots & \bar{\varepsilon}_1^{n-1} \varphi(\varepsilon_1) - \alpha_{\varepsilon_1}^{n-1} \varepsilon_1^{n-1} x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi(\varepsilon_s) - x & \bar{\varepsilon}_s \varphi(\varepsilon_s) - \alpha_{\varepsilon_s} x & \dots & \bar{\varepsilon}_s^{n-1} \varphi(\varepsilon_s) - \alpha_{\varepsilon_s}^{n-1} \varepsilon_s^{n-1} x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi(\varepsilon_n) - x & \bar{\varepsilon}_n \varphi(\varepsilon_n) - \alpha_{\varepsilon_n} x & \dots & \bar{\varepsilon}_n^{n-1} \varphi(\varepsilon_n) - \alpha_{\varepsilon_n}^{n-1} \varepsilon_n^{n-1} x \end{vmatrix}.$$

In questo per $s = \frac{n-r}{2}$ con n ed r entrambi pari o dispari o $s = n - \frac{r}{2}$ con r pari, se $\omega = 1$, e $s = \frac{n-r-1}{2}$ con n ed r non entrambi pari o dispari o $s = n - \frac{r+1}{2}$ con r dispari, se $\omega = -1$, gli elementi della orizzontale di indice s si riducono a $\varphi(\varepsilon_s) - x$.

Inoltre sviluppando lo stesso determinante prodotto secondo i minori di secondo ordine della matrice

$$\begin{vmatrix} \varphi(\varepsilon_s) - x & \varepsilon_s \varphi(\varepsilon_s) - \alpha_r \varepsilon_s x & \dots & \varepsilon_s^{n-1} \varphi(\varepsilon_s) - \alpha_r^{n-1} \varepsilon_s^{n-1} x \\ \varphi(\varepsilon_{s+r}) - x & \varepsilon_{s+r} \varphi(\varepsilon_{s+r}) - \alpha_r \varepsilon_{s+r} x & \dots & \varepsilon_{s+r}^{n-1} \varphi(\varepsilon_{s+r}) - \alpha_r^{n-1} \varepsilon_{s+r}^{n-1} x \end{vmatrix}$$

si vede che tali minori sono tutti divisibili per $x^2 - \varphi(\varepsilon_s) \varphi(\varepsilon_{s+r})$.

Pertanto ne seguono facilmente le radici già assegnate della $\Phi(x) = 0$.
(n, ω, r)

Chiaramente si vede ora che questo secondo procedimento è più semplice del precedente (n. 2), ove si fa ricorso alle proprietà dei sistemi lineari di equazioni; tuttavia è da darsi la preferenza a quello in quanto è più generale e si presta bene alla risoluzione di altre equazioni a matrice, come vedremo qui appresso.

5. Così per l'equazione

$$\Psi(x) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n - \alpha_r x \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n - \alpha_r^2 x & \omega a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_n - \alpha_r^{n-1} x & \omega a_1 & \dots & \omega a_{n-4} & \omega a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_n - \alpha_r^n x & \omega a_1 & \omega a_2 & \dots & \omega a_{n-3} & \omega a_{n-2} & \omega a_{n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

(n, ω, r)

i cui elementi conservano lo stesso significato di prima, si ha

$$\lambda f(\varepsilon_{r+s}) = \omega \varepsilon_s \varphi(\varepsilon_s) f(\varepsilon_s),$$

con i fattori f diversi da zero.

E, posto $t = \frac{n}{\delta}$, con δ massimo comune divisore fra n ed r , si conclude che l'equazione $\Psi(x) = 0$ si scinde in δ equazioni binomie di grado t
(n, ω, r)

$$\lambda^t = \omega^{\varepsilon_{i_1} \varepsilon_{i_2} \dots \varepsilon_{i_t}} \varphi(\varepsilon_{i_1}) \varphi(\varepsilon_{i_2}) \dots \varphi(\varepsilon_{i_t}),$$

essendo $i_1, i_2, \dots, i_t$ interi in progressione aritmetica di ragione r , e dove a $i_t > n$ s'intenda sostituito il suo congruo rispetto al modulo n .

In particolare l'equazione $\Psi(x) = 0$ ha le radici

$$\lambda = \omega \varepsilon_s \varphi(\varepsilon_s) \quad (Tschirnhausen);$$

l'equazione $\Psi(x) = 0$, con r ed n primi fra di loro ($\delta = 1$), si riduce alla binomia ⁽⁵⁾

$$\lambda^n = (-\omega)^{n-1} \varphi(\varepsilon_1) \varphi(\varepsilon_2) \dots \varphi(\varepsilon_n);$$

e l'equazione $\Psi(x) = 0$ al sistema di binomie ^(2v, \omega, v)

$$\lambda^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_{v+1} \varphi(\varepsilon_1) \varphi(\varepsilon_{v+1})$$

$$\lambda^2 = \varepsilon_2 \varepsilon_{v+2} \varphi(\varepsilon_2) \varphi(\varepsilon_{v+2})$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\lambda^2 = \varepsilon_v \varepsilon_{2v} \varphi(\varepsilon_v) \varphi(\varepsilon_{2v}).$$

Si potrebbe pure considerare l'equazione $\Psi(x) = 0$ con ω ^(n, \omega, r) qualsiasi, cioè a matrice circolante di tipo (ω) generico, e ne seguirebbero risultati analoghi che non diamo qui per brevità. Conviene però in questo caso studiare l'equazione nella forma

$$\begin{vmatrix} b_1 - \alpha_r x & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \\ \omega b_n & b_1 - \alpha_r^2 x & b_2 & \dots & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega b_2 & \omega b_3 & \omega b_4 & \dots & \omega b_{n-1} & \omega b_n & b_1 - \alpha_r^n x \end{vmatrix} = 0.$$

Per $\alpha_r = 1$ si avrebbe $\lambda = b_1 + b_2 \varepsilon + b_3 \varepsilon^2 + \dots + b_n \varepsilon^{n-1} = \varphi(\varepsilon)$ con ε radice n -esima di ω .

6. Se poi applichiamo lo stesso metodo al sistema di relazioni

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_n A_n = C$$

$$a_2 A_1 + a_3 A_2 + \dots + a_1 A_n = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_n A_1 + a_1 A_2 + \dots + a_{n-1} A_n = 0,$$

ove $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono i complementi algebrici degli elementi del circolante

$$C = |a_1, a_2, \dots, a_n|,$$

⁽⁵⁾ L'equazione $\Psi(x) = 0$, con r ed n primi fra di loro, è stata già risolta nella nota (3) con procedimento diverso, ma nella binomia a cui si perviene è sfuggito il segno $(-1)^{n-1} = \pm$. Tale segno manca pure nella Nota di L. CONTE: *A proposito d'una equazione a matrice circolante* (« Boll. Un. Mat. Italiana », anno XVI, 1937), che perviene alla binomia ancora per altra via.

dove il determinante $\Delta_1(x)$, simmetrico di ordine $v-1$, è così formato: nella diagonale principale gli elementi che occupano i posti d'ordine 1, $v-1$, 2, ..., $v-2$ sono $a_1 - a_2 - x$, $a_1 - a_3 - x$, ..., $a_1 - a_v - x$, nelle prime diagonali minori (adiacenti alla principale) gli elementi che occupano i posti 1, $v-2$, 2, ..., $v-3$ sono $a_2 - a_3$, $a_2 - a_4$, $a_2 - a_v$, e così successivamente. Ed allora conoscendo le radici di $\Delta(x) = 0$ e il valore di $\Delta(0)$ abbiamo pure le radici di $\Delta_1(x) = 0$ e il valore di $\Delta_1(0)$.

Il determinante $\Delta_1(0)$ è stato già considerato da T. MUIR⁽⁶⁾, che ne ha trovato il valore con procedimento diverso dal nostro, e qui l'abbiamo ripreso per lo studio dell'equazione $\Delta_1(x)$ ed anche per esprimere con esso il valore di un qualsiasi circolante di ordine $2v-1$.

Infatti, posto

$$C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{2v-1} \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2v-1} & a_1 & \dots & a_{2v-2} \end{vmatrix},$$

con le notazioni del n. 3 si deduce che il quadrato C^2 è un determinante del tipo $\Delta(0)$ (dove a_s va sostituito con φ_s) e quindi

$$C = (-1)^{v-1} (a_1 + \dots + a_{2v-1}) \begin{vmatrix} \varphi_1 - \varphi_2 & \varphi_2 - \varphi_3 & \dots & \varphi_{v-2} - \varphi_{v-1} & \varphi_{v-1} - \varphi_v \\ \varphi_2 - \varphi_3 & \varphi_1 - \varphi_4 & \dots & \varphi_{v-3} - \varphi_v & \varphi_{v-2} - \varphi_v \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{v-1} - \varphi_v & \varphi_{v-2} - \varphi_v & \dots & \varphi_2 - \varphi_4 & \varphi_1 - \varphi_3 \end{vmatrix},$$

che fa dipendere il calcolo di un determinante circolante di ordine $2v-1$ da quello di un opportuno determinante di ordine $v-1$.

⁽⁶⁾ *Lagrange's determinantal equation in the case of a circulant* (Messenger of Math., XLI, 1911).