

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

GIUSEPPE PALAMA

## Su taluni polinomi analoghi a quelli di Laguerre e sulla funzione di Bessel

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,*  
Vol. **17** (1938), n.3, p. 157–170.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_3_157_0)  
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1938\\_1\\_17\\_3\\_157\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_3_157_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione  
Matematica Italiana, 1938.

## PICCOLE NOTE

### Su taluni polinomi analoghi a quelli di Laguerre e sulla funzione di Bessel.

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce).

**Sunto.** - Si studiano dei polinomi quasi identici a quelli di LAGUERRE, sfruttando il fatto che la loro funzione generatrice, nel senso attribuito da APPELL a questa espressione, è la funzione di BESSEL.

F. VANEY <sup>(1)</sup> studia i polinomi generati dalla funzione

$$e^{-\frac{xz}{1-az}}$$

e chiama questi, polinomi di LAGUERRE. Lo studio dei polinomi, che indichiamo con  $L_n^{(x)}(x, a)$ , generati dalla funzione più generale

$$(1) \quad (1-az)^{-(x+1)} \cdot e^{-\frac{xz}{1-az}},$$

ha, credo, molto interesse, perchè la funzione generatrice, nel senso attribuito a questa espressione da APPELL <sup>(2)</sup>, di alcuni polinomi da noi indicati con  $A_n^{(x)}(x, a)$  e che sono quasi identici degli  $L_n^{(x)}(x, a)$ , è la funzione di BESSEL.

È qui, suppongo, per la prima volta che si mette in evidenza questa notevole relazione fra la funzione di BESSEL ed i detti polinomi  $A_n^{(x)}(x, a)$  di APPELL, quasi identici degli  $L_n^{(x)}(x)$  di LAGUERRE, e che si trae partito da questa relazione per studiare gli  $L_n^{(x)}(x)$  o, se si vuole, gli stessi polinomi di APPELL  $A_n^{(x)}(x, a)$ .

(1) Cfr. VANEY, *Sur les polynomes de Laguerre*, tesi presentata alla Facoltà di Scienze di Losanna, 1921.

(2) Cfr. P. APPELL, *Sur une classe des polynomes*, « Annales de l'École Normale », 2<sup>a</sup> serie, vol. X, pp. 119-145, 1880.

1. Sviluppando la (1) secondo le potenze crescenti di  $z$ , abbiamo

$$(2) \quad (1 - az)^{-(x+1)} e^{-\frac{xz}{1-az}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n L_n^{(x)}(x, a),$$

ma la

$$(2') \quad (1 - z)^{-(x+1)} e^{-\frac{xz}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n L_n^{(x)}(x),$$

si riduce alla precedente quando vi si cambi  $z$  in  $az$ ,  $x$  in  $\frac{x}{a}$ ; facendo questi cambiamenti nella (2') e confrontando poi con la (2), si trae la relazione seguente che lega  $L_n^{(x)}(x, a)$  con  $L_n^{(x)}(x)$ :

$$(3) \quad L_n^{(x)}(x, a) = a^n L_n^{(x)}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Si noti che gli  $L_n^{(x)}(x, a)$  si riducono agli  $L_n^{(x)}(x)$ , per  $a = 1$ , ossia è

$$(3') \quad L_n^{(x)}(x, 1) = L_n^{(x)}(x).$$

Inoltre dallo sviluppo di  $L_n^{(x)}(x)$  si ricava subito, a mezzo della (3), quello di  $L_n^{(x)}(x, a)$ :

$$(4) \quad L_n^{(x)}(x, a) = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} \frac{\Gamma(x+n+1) x^{n-m} a^m}{\Gamma(x+n-m+1)},$$

e da questa derivando rispetto ad  $a$ , si ottiene

$$(5) \quad \frac{\partial L_n^{(x)}(x, a)}{\partial a} = (x+n) L_{n-1}^{(x)}(x, a).$$

Dalla (5) si rileva che per  $x=0$  gli  $L_n^{(x)}(x, a)$ , quando si consideri  $a$  come argomento, si riducono ai detti polinomi di APPELL. Ma più in generale la stessa cosa si verifica per i polinomi  $A_n^{(x)}(x, a)$  definiti dalla

$$(6) \quad A_n^{(x)}(x, a) = \frac{n! L_n^{(x)}(x, a)}{\Gamma(x+n+1)},$$

cioè si ha

$$\frac{\partial A_n^{(x)}(x, a)}{\partial a} = n A_{n-1}^{(x)}(x, a),$$

come subito otteniamo derivando la (6) rispetto ad  $a$  e tenendo presente la (5).

Dal confronto di (6) e (3), si ha la relazione che lega i polinomi di APPELL  $A_n^{(x)}(x, a)$  ai nostri polinomi di LAGUERRE, si ha cioè

$$(7) \quad A_n^{(x)}(x, a) = \frac{n! a^n L_n^{(x)}\left(\frac{x}{a}\right)}{\Gamma(x+n+1)}.$$

I polinomi  $A_n^{(x)}(x, a)$  possono perciò studiarsi come polinomi di APPELL e noi cominceremo questo studio nel prossimo numero, dimostrando che, a meno di un fattore, la funzione generatrice, nel senso con cui questa espressione è stata usata da APPELL, degli  $A_n^{(x)}(x, a)$  è la funzione di BESSEL.

2. Dico che la funzione generatrice, nel senso anzidetto, degli  $A_n^{(x)}(x, a)$  è la  $\varphi_x(2\sqrt{xh})$  definita dalla

$$\varphi_x(2\sqrt{xh}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h^n x^n}{n! \Gamma(x+n+1)} = (hx)^{-\frac{x}{2}} I_x(2\sqrt{xh}),$$

ove  $I_x$  indica la funzione di BESSEL di prima specie e di ordine  $x$ .

Infatti si ha

$$(8) \quad \varphi_x(2\sqrt{xh})e^{ah} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h^n x^n}{n! \Gamma(x+n+1)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n a^n}{n!},$$

e quindi moltiplicando alla CAUCHY le due serie del 2° membro

$$\varphi_x(2\sqrt{xh})e^{ah} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n h^n \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m x^{n-m} a^m}{(n-m)! m! \Gamma(x+n-m+1)},$$

che per la (4) e la (6), può scriversi

$$\varphi_x(2\sqrt{xh})e^{ah} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n A_n^{(x)}(x, a)}{n!},$$

od anche

$$(9) \quad (hx)^{-\frac{x}{2}} I_x(2\sqrt{xh})e^{ah} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n A_n^{(x)}(x, a)}{n!}.$$

3. Faremo vedere in questo n. e nei successivi come lo studio dei polinomi di LAGUERRE  $L_n^{(x)}(x)$ , dei più generali  $L_n^{(x)}(x, a)$  e di

quelli di APPELL  $A_n^{(x)}(x, a)$ , possa farsi sfruttando alcuni dei risultati noti per la funzione di BESSEL. Trarremo cioè, agevolmente, da alcune note formule sulla funzione di BESSEL, le principali fra le relazioni conosciute per gli  $L_n^{(x)}(x)$  e qualcuna anche nuova.

Se indichiamo con  $\Phi_x$  il primo membro della (9), derivando questa rispetto ad  $x$ , si ha quando si tenga presente la

$$(10) \quad \frac{dI_x(z)}{dz} = \frac{1}{2} \left[ I_{x-1}(z) - I_{x+1}(z) \right],$$

$$-\frac{\alpha}{2x} \Phi_x + \frac{1}{2x} \Phi_{x-1} - \frac{h}{2} \Phi_{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \frac{\partial A_n^{(x)}(x, a)}{\partial x},$$

e da questa, sostituendo al posto di  $\Phi_x$ ,  $\Phi_{x-1}$ ,  $\Phi_{x+1}$  gli sviluppi che si ottengono con la (9) ed eguagliando poi i coefficienti di  $h^n$ , si trae

$$(11) \quad -\alpha A_n^{(x)}(x, a) + A_n^{(x-1)}(x, a) - nx A_{n-1}^{(x+1)}(x, a) = 2x \frac{\partial A_n^{(x)}(x, a)}{\partial x},$$

è quindi per la (6)

$$(12) \quad -\alpha L_n^{(x)}(x, a) + (x+n) L_n^{(x-1)}(x, a) - x L_{n-1}^{(x+1)}(x, a) = 2x \frac{\partial L_n^{(x)}(x, a)}{\partial x}.$$

4. L'ultima ci è utile per determinare una semplice relazione da cui discende, per la (3'), altra nota. Se nella

$$(13) \quad \frac{2x}{z} I_{\alpha}(z) - I_{\alpha}(z) = I_{\alpha+1}(z),$$

poniamo  $z = 2\sqrt{xh}$  e la moltiplichiamo poi per  $\sqrt{xh}(hx)^{-\frac{x}{2}} e^{ah}$ , si ha

$$x(hx)^{-\frac{x}{2}} I_{\alpha}(2\sqrt{xh}) e^{ah} - (hx)^{-\frac{x-1}{2}} I_{\alpha}(2\sqrt{xh}) e^{ah} = (hx)^{-\frac{x-1}{2}} I_{\alpha+1}(2\sqrt{xh}) e^{ah};$$

sviluppando, a mezzo della (9), tutti i termini secondo le potenze crescenti di  $h$  ed eguagliando poi i coefficienti di  $h^n$ , si ricava

$$(14) \quad \alpha A_n^{(x)}(x, a) - A_n^{(x-1)}(x, a) = nx A_{n-1}^{(x+1)}(x, a),$$

e da questa per la (6)

$$(15) \quad \alpha L_n^{(x)}(x, a) - (x+n) L_n^{(x-1)}(x, a) = x L_{n-1}^{(x+1)}(x, a).$$

Sommando membro a membro questa e la (12), si ottiene la formula

$$(16) \quad \frac{\partial L^{(x)}(x, a)}{\partial x} = -L^{(x+1)}_{n-1}(x, a),$$

che per  $a=1$  si riduce ad altra notissima; invece sommando (11) e (14), risulta

$$(17) \quad \frac{\partial A^{(x)}(x, a)}{\partial x} = -nA^{(x+1)}_{n-1}(x, a).$$

5. Del resto la (17) e quindi la (16) poteva stabilirsi più semplicemente e direttamente utilizzando la

$$\frac{dI_x(z)}{dz} = \frac{x}{z} I_x(z) - I_{x+1}(z).$$

Infatti derivando la (9) rispetto ad  $x$ , abbiamo, se ci serviamo della precedente, a semplificazioni effettuate

$$-h\Phi_{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \frac{\partial A^{(x)}(x, a)}{\partial x},$$

e da questa, sviluppando  $\Phi_{x+1}$  secondo le potenze crescenti di  $h$ , a mezzo della (9), ed eguagliando poi i coefficienti di  $h^n$  si ricava senz'altro la (17) da cui, per la (6), deriva la (16).

6. Se deriviamo la (9) rispetto ad  $h$  e teniamo presente la (10), abbiamo

$$-\frac{x}{2h} \Phi_x + \frac{1}{2h} \Phi_{x-1} - \frac{x}{2} \Phi_{x+1} + a\Phi_x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n A^{(x)}_{n+1}(x, a)}{n!},$$

moltiplicando ambo i membri per  $2h$ , sostituendo alle  $\Phi$  gli sviluppi che si ottengono utilizzando la (9) ed eguagliando i coefficienti di  $h^n$ , risulta

$$-(2n+2+a)A^{(x)}_{n+1}(x, a) + A^{(x-1)}_{n+1}(x, a) = (n+1)x A^{(x+1)}_n(x, a) - 2a(n+1)A^{(x)}_n(x, a),$$

che per la (6), dà

$$(x+n+1)L^{(x-1)}_{n+1}(x, a) - (2n+2+a)L^{(x)}_{n+1}(x, a) = xL^{(x+1)}_n(x, a) - 2a(x+n+1)L^{(x)}_n(x, a).$$

Se in questa cambiamo  $n$  in  $n-1$  e poi sommiamo membro a membro la relazione che si ottiene con la (15), si ha una relazione che per la (3') si riduce ad altra conosciuta:

$$(18) \quad n \underset{n}{L}^{(x)}(x, a) + x \underset{n-1}{L}^{(x+1)}(x, a) - a(x+n) \underset{n-1}{L}^{(x)}(x, a) = 0.$$

Se infine sommiamo membro a membro la precedente con la (15) stessa, si ha la seguente altra formula che dà altra nota, quando si tenga presente la (3'):

$$(19) \quad \underset{n}{L}^{(x)}(x, a) - \underset{n}{L}^{(x-1)}(x, a) = a \underset{n-1}{L}^{(x)}(x, a).$$

È facile poi, concludendo, con il metodo adottato in un recente libro di G. SANSONE <sup>(1)</sup>, servendosi delle (16), (18) e (19), determinare l'equazione differenziale del 2° ordine cui soddisfano gli  $\underset{n}{L}^{(x)}(x, a)$ , quando si consideri  $x$  come variabile indipendente.

7. Altre due formule, una delle quali si riduce servendosi della (3') ad altra notissima, l'altra nuova, possono stabilirsi a mezzo delle relazioni trovate nei n.º precedenti. Difatti se cambiamo nella (18)  $n$  in  $n+1$  ed eliminiamo poi  $\underset{n}{L}^{(x)}(x, a)$  fra la relazione ottenuta e la (19), otteniamo

$$(20) \quad (n+1) \underset{n+1}{L}^{(x)}(x, a) + x \underset{n}{L}^{(x+1)}(x, a) - a(x+n+1) \underset{n}{L}^{(x-1)}(x, a) - \\ - a^2(x+n+1) \underset{n-1}{L}^{(x)}(x, a) = 0.$$

Dalle (15) e (19) invece abbiamo

$$ax \underset{n}{L}^{(x)}(x, a) - a(x+n) \underset{n}{L}^{(x-1)}(x, a) - x \underset{n}{L}^{(x+1)}(x, a) + x \underset{n}{L}^{(x)}(x, a) = 0.$$

Sommando con (20) ed eliminando poi fra la somma ottenuta e la (19)  $\underset{n}{L}^{(x-1)}(x, a)$ , si ha infine la formula cercata

$$(21) \quad (n+1) \underset{n+1}{L}^{(x)}(x, a) - [a(x+2n+1) - x] \underset{n}{L}^{(x)}(x, a) + a^2(x+n) \underset{n-1}{L}^{(x)}(x, a) = 0,$$

ricorrente rispetto all'indice  $n$  degli  $\underset{n}{L}^{(x)}(x, a)$ .

<sup>(1)</sup> Cfr. VITALI e SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*. Parte II (G. SANSONE), 1935 (p. 188).

Dalla (21), si ricava immediatamente l'equazione differenziale del 2° ordine cui soddisfano gli  $L_n^{(\alpha)}(x, a)$ , quando si considera  $a$  come variabile indipendente.

Infatti se in (21) cambiamo  $n$  in  $n-1$ , si ha

$$(22) \quad n L_n^{(\alpha)}(x, a) - [a(2n + \alpha - 1) - x] L_{n-1}^{(\alpha)}(x, a) + a^2(\alpha + n - 1) L_{n-2}^{(\alpha)}(x, a) = 0;$$

ma per la (5)

$$L_{n-2}^{(\alpha)}(x, a) = \frac{1}{(\alpha + n) \cdot (\alpha + n - 1)} \cdot \frac{\partial^2 L_n^{(\alpha)}(x, a)}{\partial a^2},$$

$$L_{n-1}^{(\alpha)}(x, a) = \frac{1}{\alpha + n} \frac{\partial L_n^{(\alpha)}(x, a)}{\partial a};$$

quindi la (22) può scriversi

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 L_n^{(\alpha)}(x, a)}{\partial a^2} - [a(2n + \alpha - 1) - x] \frac{\partial L_n^{(\alpha)}(x, a)}{\partial a} + (\alpha + n) n L_n^{(\alpha)}(x, a) = 0,$$

cui si può dare la forma

$$(23) \quad \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{e^{-\frac{x}{a}} L_{n-1}^{(\alpha)}(x, a)}{a^{2n+\alpha-1}} \right] = \frac{-n e^{-\frac{x}{a}} L_n^{(\alpha)}(x, a)}{a^{2n+\alpha+1}}.$$

8. Dalla (23) si ricava una notevole formula che può servire di definizione degli  $L_n^{(\alpha)}(x, a)$ . Si derivi difatti la (23) rispetto ad  $a$  e si tenga presente che la derivata del 2° membro si attiene dalla stessa (23) cambiandovi  $n$  in  $n+1$ ; pertanto si ha

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \left[ \frac{e^{-\frac{x}{a}} L_{n-1}^{(\alpha)}(x, a)}{a^{2n+\alpha-1}} \right] = \frac{(-1)^2 n(n+1) e^{-\frac{x}{a}} L_{n+1}^{(\alpha)}(x, a)}{a^{2n+\alpha+3}},$$

e da questa, operando nello stesso modo altre  $m-2$  volte, si perviene infine alla formula

$$\frac{\partial^m}{\partial a^m} \left[ \frac{e^{-\frac{x}{a}} L_{n-1}^{(\alpha)}(x, a)}{a^{2n+\alpha-1}} \right] = \frac{(-1)^m (m+n-1)! e^{-\frac{x}{a}} L_{m+n-1}^{(\alpha)}(x, a)}{(n-1)! a^{2n+\alpha+2m-1}},$$

dalla quale, per  $n = 1$ , essendo  $L_0^{(x)}(x, a) = 1$ , si ricava la formula

$$L_m^{(x)}(x, a) = \frac{(-1)^m}{m!} a^{x+2m+1} e^{\frac{x}{a}} \frac{\partial^m}{\partial a^m} \left( e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

che può servire, come si diceva, di definizione degli  $L_n^{(x)}(x, a)$ .

9. La (21) può essere stabilita direttamente e, credo, più elegantemente nel seguente modo.

Si sa che la funzione  $\varphi_x(z)$  definita da

$$\varphi_x(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-x} I_x(z),$$

soddisfa alla seguente equazione differenziale del 2° ordine

$$z\varphi_x''(z) + (2x+1)\varphi_x'(z) + z\varphi_x(z) = 0.$$

Se nella precedente cambiamo  $z$  in  $2\sqrt{xh}$  e si considera  $h$  come variabile indipendente è facile trarre, da quell'equazione l'altra cui soddisfa la funzione

$$\varphi_x(2\sqrt{xh}) = (hx)^{-\frac{x}{2}} I_x(2\sqrt{xh}),$$

cioè la funzione generatrice dei nostri polinomi  $A_n^{(x)}(x, a)$ . Si trova così che  $\varphi_x(2\sqrt{xh})$  è integrale dell'equazione differenziale

$$(24) \quad h\varphi_x''(2\sqrt{xh}) + (x+1)\varphi_x'(2\sqrt{xh}) + x\varphi_x(2\sqrt{xh}) = 0,$$

ove  $\varphi_x''(2\sqrt{xh})$ ,  $\varphi_x'(2\sqrt{xh})$  stanno rispettivamente per le derivate seconda e prima di  $\varphi_x(2\sqrt{xh})$  rispetto ad  $h$ .

APPELL, nel suo lavoro citato, indica con  $(d^k A)_n$  i polinomi che hanno per funzione generatrice  $\frac{d^k \varphi(h)}{dh^k}$ , cioè pone

$$\frac{d^k \varphi(h)}{dh^k} e^{ah} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(d^k A)_n h^n}{n!},$$

e trova che

$$(d^k A)_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{k}{j} x^j A_{n+k-j},$$

e quindi in particolare

$$(25) \quad (dA)_n = A_{n+1} - xA_n, \quad (d^2 A)_n = A_{n+2} - 2xA_{n+1} + x^2 A_n.$$

Ciò premesso, se moltiplichiamo <sup>(1)</sup> la (24) per  $e^{ah}$  e sviluppiamo i suoi tre termini secondo le potenze crescenti di  $h$ , si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{n+1}(\partial^2 A^{(\alpha)})_n}{n!} + (\alpha + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n (\partial A^{(\alpha)})_n}{n!} + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n A^{(\alpha)}(x, a)}{n!} = 0,$$

ove si è scritto <sup>(2)</sup>  $(\partial^2 A^{(\alpha)})_n$ ,  $(\partial A^{(\alpha)})_n$  invece di  $(\partial^2 A(x, a))_n$ ,  $(\partial A(x, a))_n$ .

Dalla precedente, annullando il coefficiente di  $h^n$ , risulta

$$\frac{(\partial^2 A^{(\alpha)})_{n-1}}{(n-1)!} + (\alpha + 1) \frac{(\partial A^{(\alpha)})_n}{n!} + \frac{x A^{(\alpha)}(x, a)}{n!} = 0,$$

ossia, per le (25),

$$(\alpha + n + 1) A^{(\alpha)}(x, a) - [a(2n + \alpha + 1) - x] A^{(\alpha)}(x, a) + x^2 n A^{(\alpha)}(x, a) = 0,$$

che infine, per la (6), dà la formula cercata:

$$(n + 1) L^{(\alpha)}(x, a) - [a(2n + \alpha + 1) - x] L^{(\alpha)}(x, a) + a^2(\alpha + n) L^{(\alpha)}(x, a) = 0.$$

**10.** APPELL nel lavoro citato studia i polinomi che indica con  $(AB)_n$ , ottenuti sostituendo nello sviluppo di  $A_n$  alla potenza  $x^m$  il polinomio  $B_m$ , anch'esso di APPELL, e dimostra che la funzione generatrice degli  $(AB)_n$  è il prodotto delle funzioni generatrici degli  $A_n$ ,  $B_n$ . Ora traendo profitto di ciò, può stabilirsi una curiosa e semplice relazione per gli  $(AB)_n$  nel caso che tanto  $A_n$  che  $B_n$  siano degli  $A^{(\alpha)}(x, a)$ , con parametro  $\alpha$  diverso. Perciò teniamo presente la nota formula

$$\frac{I(z) I(z)}{\alpha} + \frac{I(z) I(z)}{1-\alpha} = \frac{2}{\pi z} \sin \pi z,$$

<sup>(1)</sup> Il procedimento seguito alla fine del n.° 9, è indicato da APPELL, nel loc. cit., per ottenere l'equazione differenziale cui soddisfano i suoi  $A_n$ , una volta che si conosca l'equazione differenziale cui soddisfa la funzione generatrice di questi stessi polinomi  $A_n$ .

<sup>(2)</sup> Usando i simboli  $(\partial^2 A^{(\alpha)}(x, a))_n$ ,  $(\partial A^{(\alpha)}(x, a))_n$  in luogo di  $(\partial^2 A(x, a))_n$ ,  $(\partial A(x, a))_n$  perchè qui, a differenza di quanto avviene nel lavoro di APPELL, la funzione generatrice viene derivata parzialmente rispetto ad una delle sue due variabili indipendenti, la  $h$ .

perchè da questa, ponendo  $z = 2\sqrt{xh}$  e moltiplicando poi per  $\sqrt{xh} e^{ah}$ , si ha

$$hx(xh)^{-\frac{\alpha}{2}} I_{\alpha}(2\sqrt{xh}) \cdot (hx)^{-\frac{1-\alpha}{2}} I_{1-\alpha}(2\sqrt{xh}) e^{ah} + (hx)^{-\frac{\alpha-1}{2}} I_{\alpha-1}(2\sqrt{xh}) \cdot (hx)^{\frac{\alpha}{2}} I_{-\alpha}(2\sqrt{xh}) e^{ah} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} e^{ah},$$

che, tenendo presente la detta proprietà relativa alla funzione generatrice degli  $(AB)_n$ , se si sviluppano i due addendi del 1° membro e il 2° membro secondo le potenze crescenti di  $h$ , e si eguagliano poi i coefficienti di  $h^n$ , dà

$$(26) \quad nx(A^{(\alpha)}A^{(1-\alpha)})_{n-1} + (A^{(\alpha-1)}A^{(-\alpha)})_n = \frac{a^n}{\pi} \sin \pi \alpha.$$

Ma è bene notare che per ottenere  $(A^{(\alpha)}A^{(\beta)})_n$  è  $\alpha$  e non  $x$  la variabile alla cui potenza  $m^a$  dello sviluppo di  $A^{(\alpha)}(x, a)$  deve sostituirsi  $A^{(\beta)}(x, a)$ .

11. Un'altra formula in cui compaiono gli  $(A^{(\alpha)}A^{(\beta)})_n$  si può, per es., ottenere nel modo seguente:

Si moltiplichi la (13) per  $I^2(z)$  e si ha

$$I_{\alpha+1}(z) I_{\alpha}(z) + I_{\alpha}(z) I_{\alpha-1}(z) = \frac{2\alpha}{z} I^2(z),$$

e da questa cambiando  $\alpha$  in  $\alpha + j$ , moltiplicando per  $(-1)^j$  e sommando le formule che si ottengono per i valori  $0, 1, \dots, m$  di  $j$ , risulta

$$2 \sum_{j=0}^m (-1)^j (\alpha + j) I^2(z) = z I_{\alpha+j}(z) I_{\alpha-j}(z) + (-1)^m z I_{\alpha+m+1}(z) I_{\alpha-m}(z)$$

La precedente, se vi poniamo  $z = 2\sqrt{xh}$  e la moltiplichiamo per  $e^{an}$ , può scriversi

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m (-1)^j (\alpha + j) (hx)^{\alpha+j} \left[ (hx)^{-\frac{\alpha+j}{2}} I_{\alpha+j}(2\sqrt{xh}) \right]^2 = \\ & = (hx)^{\alpha} \cdot (hx)^{-\frac{\alpha}{2}} I_{\alpha}(2\sqrt{xh}) (hx)^{-\frac{\alpha-1}{2}} I_{\alpha-1}(2\sqrt{xh}) e^{ah} + \\ & + (-1)^m (hx)^{-\frac{\alpha+m+1}{2}} I_{\alpha+m+1}(2\sqrt{xh}) \cdot (hx)^{-\frac{\alpha+m}{2}} I_{\alpha+m}(2\sqrt{xh}) e^{ah}, \end{aligned}$$

e da questa procedendo come alla fine del n. precedente, si ha infine

$$(27) \quad \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j (\alpha + j) x^j}{(n-j)!} ([A^{(\alpha+j)}]^2)_{n-j} = \frac{(A^{(\alpha)} A^{(\alpha-1)})_n}{n!} + \\ + \frac{(-1)^m x^{m+1} (A^{(\alpha+m+1)} A^{(\alpha+m)})_{n-m-1}}{(n-m-1)!},$$

che per  $\alpha = 0$ , dà

$$\sum_{j=0}^m \frac{(-x)^j j}{(n-j)!} ([A^{(j)}]^2)_{n-j} = \frac{(AA^{(-1)})_n}{n!} + \frac{(-1)^m x^{m+1} (A^{(m+1)} A^{(m)})_{n-m-1}}{(n-m-1)!}.$$

Se invece nella (27) poniamo  $m=0$ , abbiamo la formula

$$(28) \quad \alpha [A^{(\alpha)}]^2 = (A^{(\alpha)} A^{(\alpha-1)})_n + nx (A^{(\alpha+1)} A^{(\alpha)})_{n-1}.$$

che però può stabilirsi direttamente e subito a mezzo della (14).

12. Dal confronto di (26) e (28), per valori particolari di  $\alpha$ , possono trarsi alcune semplici formule. Così se poniamo nella (26)  $\alpha=0$  e nella (28)  $\alpha=1$  e poi eliminiamo fra esse  $(AA^{(1)})_{n-1}$ , abbiamo (si noti che è  $(A^{(2)} A^{(0)})_n = (A^{(0)} A^{(2)})_n$ )

$$nx([A^{(1)}]^2)_{n-1} + (A^{(-1)} A)_n = (n-1)nx^2(A^{(1)} A^{(2)})_{n-2};$$

invece ponendo nella (26)  $\alpha=0$ , come prima, ma nella (28)  $\alpha=-1$ , ed eliminando poi  $(AA^{(1)})_n$ , si ha

$$n(n+1)x^2(AA^{(1)})_{n-1} - ([A^{(-1)}]^2)_{n+1} = (A^{(-1)} A^{(-2)})_{n+1}.$$

13. Molte altre formule relative ai polinomi di LAGUERRE possono stabilirsi sfruttando delle identità fra le funzioni di BESSEL; noi ci limitiamo a dare alcuni esempi.

Se la

$$\frac{2n}{z^2} I_n(z) = \frac{n!}{2} \left(\frac{2}{z}\right)^{n+1} I_1(z) - \frac{n!}{2} \sum_{j=0}^{n-2} \left(\frac{2}{z}\right)^{n-j} \frac{I_j(z)}{(j+1)!},$$

ponendovi  $z = 2\sqrt{xh}$ , la scriviamo così:

$$(hx)^{n-1} (hx)^{-\frac{n}{2}} I_n(2\sqrt{xh}) = (n-1)! (hx)^{-\frac{1}{2}} I_1(2\sqrt{xh}) - \\ - (n-1)! \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(hx)^j (hx)^{-\frac{j}{2}} I_j(2\sqrt{xh})}{(j+1)!},$$

moltiplicandola per  $e^{nh}$ , sviluppando la funzione  $\Phi_x$  che vi compaiono secondo le potenze crescenti di  $h$  ed eguagliando poi i coefficienti di  $h^n$ , dà, qualora si cambi al risultato  $n$  in  $n+1$  e si tien conto della (6),

$$(29) \quad (m+1) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j L^{(j)}(x, a)}{(j+1)!} = \frac{L^{(1)}(x, a)}{m} - \frac{x^n L^{(n)}(x, a)}{n!}.$$

Dalla (13), scritta così

$$I(z) + I(z) = \frac{2x}{z} I(z),$$

si ricava, quando si cambi in  $\alpha$  in  $\alpha + 2j$ , si moltiplichi per  $(-1)^j$  e si sommino tutte le formule che si ottengono facendo  $j = 0, 1, \dots, m$ ,

$$2 \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j (\alpha + 2j)}{z} I(z) = I(z) + (-1)^m I(z).$$

e da questa per  $z = 2\sqrt{xh}$  con il procedimento seguito precedentemente, si ha infine

$$(30) \quad \sum_{j=0}^n \frac{(-x)^j (\alpha + 2j) L^{(j)}(x, a)}{\Gamma(\alpha + n + j + 1)} = \frac{L^{(\alpha-1)}(x, a)}{\Gamma(\alpha + n)} + \frac{(-1)^m x^{m+1} L^{(\alpha+2m+1)}(x, a)}{\Gamma(\alpha + n + m + 1)}.$$

Se la stessa (13) la moltiplichiamo invece per  $\frac{2^{z-1}\Gamma(z)}{z^{z-1}}$ , abbiamo

$$\frac{2^{z-1}\Gamma(z)}{z^{z-1}} I(z) = \frac{2^z \Gamma(\alpha + 1)}{z^\alpha} I(z) - \frac{2^{z-1}\Gamma(z)}{z^{z-1}} I(z),$$

e da questa cambiando  $\alpha$  in  $\alpha + j$  e sommando tutte le formule che si ricavano facendovi poi  $j = 0, 1, \dots, m$ , si ha

$$\sum_{j=0}^m \left(\frac{2}{z}\right)^{\alpha+j-1} \Gamma(\alpha+j) I(z) = \left(\frac{2}{z}\right)^{\alpha+m} \Gamma(\alpha+m+1) I(z) - \left(\frac{2}{z}\right)^{\alpha-1} \Gamma(\alpha) I(z)$$

che per  $z = 2\sqrt{xh}$ , con il metodo seguito al primo degli esempi esposti, dà (\*)

$$(31) \quad x \sum_{j=0}^m \frac{\Gamma(\alpha+j) L^{(\alpha+j+1)}(x, a)}{\Gamma(\alpha+n+j+1)} = \frac{\Gamma(\alpha+m+1) L^{(\alpha+m)}(x, a)}{\Gamma(\alpha+m+n+1)} - \frac{\Gamma(\alpha) L^{(\alpha-1)}(x, a)}{\Gamma(\alpha+n)}.$$

(\*) Alcune delle formule di questo n.º e cioè le (29), (30), (31) saranno da noi stabilite in un prossimo lavoro relativo pure ai polinomi di LA-GUERRE ove però, fra l'altro, questi polinomi sono studiati a mezzo di una equazione funzionale che credo notevole. Il detto lavoro è di imminente pubblicazione nei « Rend. del R. Ist. Lombardo di Sc. e Lett. ».

Ed infine se moltiplichiamo ancora la (13) per  $\frac{z^{x+1}}{2^{x+1}\Gamma(x+1)}$ , abbiamo

$$\frac{z^{x+1}}{2^{x+1}\Gamma(x+1)} \frac{I(z)}{z-1} = \frac{z^x I(z)}{2^x \Gamma(x)} - \frac{z^{x+1} I(z)}{2^{x+1} \Gamma(x+1)},$$

da cui cambiando  $x$  in  $x+j$  e sommando tutte le formule che si ottengono quando si metta  $j=0, 1, \dots, m$ , si ottiene

$$\sum_{j=0}^m \frac{z^{x+j+1} I(z)}{2^{x+j+1} \Gamma(x+j+1)} = \frac{z^x I(z)}{2^x \Gamma(x)} - \frac{z^{x+m+1} I(z)}{2^{x+m+1} \Gamma(x+m+1)},$$

che semplificando e ponendo poi  $z = 2\sqrt{xh}$ , con il solito procedimento dà

$$\sum_{j=0}^m \frac{x^j A_{n-j}^{(x+j-1)}(x, a)}{\Gamma(x+j+1)} = \frac{A_n^{(x)}(x, a)}{\Gamma(x)} - \frac{x^{m+1} A_{n-m-1}^{(x+m+1)}(x, a)}{\Gamma(x+m+1)},$$

ossia per la (6)

$$(x+n) \sum_{j=0}^m \frac{x^j (n-1)! L_{n-j}^{(x+j-1)}(x, a)}{\Gamma(x+j+1)} = \frac{n! L_n^{(x)}(x, a)}{\Gamma(x)} - \frac{x^{m+1} (n-m-1)! L_{n-m-1}^{(x+m+1)}(x, a)}{\Gamma(x+m+1)}$$

e da questa per  $m=n$

$$(x+n) \sum_{j=0}^n \frac{x^j (n-j)! L_{n-j}^{(x+j-1)}(x, a)}{\Gamma(x+j+1)} = \frac{n! L_n^{(x)}(x, a)}{\Gamma(x)}.$$

14. Si noti che da tutte le formule trovate relative ai polinomi  $L_n^{(x)}(x, a)$ , ponendovi  $a=1$ , si hanno per la (3') delle relazioni fra i polinomi  $L_n^{(x)}(x, a)$  di LAGUERRE.

15. Infine osserviamo che il procedimento seguito in questa Nota, per dedurre da formule per la funzione di BESSEL relazioni per i polinomi di LAGUERRE, può invertirsi onde trarre da formule sui polinomi di LAGUERRE identità per la funzione di BESSEL. Facciamo un esempio.

Dalla

$$\frac{\partial L_n^{(x)}(x)}{\partial x} = - \frac{L_{n-1}^{(x+1)}(x)}{L_n^{(x)}(x)}$$

per le (3) e (6), si ha

$$\frac{{}_n^{(x)} \partial A(x, a)}{\partial x} = - {}_{n-1}^{(x+1)} A(x, a).$$

Moltiplichiamo quest'ultima per  $\frac{h^n}{n!}$  e sommiamo in ogni membro tutti i termini che si ottengono facendo  $n=1, 2, \dots, \infty$ ; si ha così

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \frac{{}_n^{(x)} \partial A(x, a)}{\partial x} = - h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} {}_{n-1}^{(x+1)} A(x, a),$$

ossia, per la (9),

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ (hx)^{-\frac{\alpha}{2}} I_{\alpha}(2\sqrt{xh}) \right] e^{ah} = - h(hx)^{-\frac{\alpha+1}{2}} I_{\alpha+1}(2\sqrt{xh}) e^{ah}$$

eseguendo la derivazione al 1° membro, semplificando e cambiando poi  $2\sqrt{xh}$  in  $x$ , si ottiene infine la nota formula:

$$-\alpha I_{\alpha}(x) + x I'_{\alpha}(x) = -x I_{\alpha+1}(x).$$