
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

SILVIO CINQUINI

Sopra i problemi di valori al contorno per equazioni differenziali non lineari

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 17 (1938), n.2, p. 99–105.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_99_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_99_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1938.

Sopra i problemi di valori al contorno per equazioni differenziali non lineari (*).

Nota di SILVIO CINQUINI (a Pisa).

Sunto. — Si dà una nuova e rapida dimostrazione dell'esistenza della soluzione di un problema di valori al contorno, già considerato da H. O. HIRSCHFELD, per equazioni differenziali non lineari del secondo ordine, sotto condizioni un po' più generali di quelle di tale Autore, riconducendo tale questione ad un problema di Calcolo delle Variazioni e giovandosi di un'estensione di un teorema di esistenza dell'estremo del TONELLI. Un semplice esempio mette in evidenza che l'intervallo, in cui il teorema precedente assicura l'esistenza della soluzione, è il massimo in cui il problema di valori al contorno ammette sempre soluzione.

Infine si estende il precedente procedimento a problemi di valori al contorno relativi ad equazioni differenziali non lineari di ordine pari e maggiore di due.

È noto che, considerata l'equazione differenziale non lineare

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = g(x, y),$$

il problema di valori al contorno, $y(0) = y(a) = 0$, può essere ricondotto allo studio dell'equazione integrale non lineare

$$(2) \quad y(x) = \int_0^a K(x, \xi) g(\xi, y(\xi)) d\xi,$$

$K(x, \xi)$ essendo la funzione di GREEN.

Relativamente alle equazioni di tipo (2) A. HAMMERSTEIN ⁽¹⁾ ha stabilito che, se $K(x, \xi)$ è un nucleo discontinuo (nel senso che valga la teoria delle equazioni integrali lineari), simmetrico, positivo e limitato, e se la funzione $g(\xi, u)$ soddisfa alla disuguaglianza

$$\int_0^u g(\xi, t) dt \geq -\frac{\lambda}{2} u^2 - \mu,$$

ove λ e μ sono due costanti positive, con λ minore del minimo valore singolare del nucleo $K(x, y)$, allora l'equazione (2) ammette soluzione.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

⁽¹⁾ A. HAMMERSTEIN, *Nonlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen*. (« Acta Mathematica », Band 54 (1930), pp. 117-176), p. 120.

Recentemente H. O. HIRSCHFELD ⁽²⁾ ha osservato come dal risultato di HAMMERSTEIN segue che il problema sopra citato per l'equazione (1) ammette soluzione in ogni intervallo $(0, a)$, con $0 \leq \lambda < \frac{\pi^2}{a^2}$, e si è proposto di pervenire a questo stesso risultato, per altra via, sotto condizioni un po' meno generali, considerando l'equazione data come l'equazione di EULERO di un certo integrale da render minimo e facendo uso di una generalizzazione del noto metodo delle approssimazioni successive di PICARD. Poi, sotto condizioni un po' più restrittive, l'HIRSCHFELD ha provato l'unicità della soluzione ed ha indicato un metodo per il calcolo approssimato di tale soluzione.

Nella presente Nota mi propongo di mostrare che l'esistenza della soluzione del citato problema di valori al contorno può dimostrarsi in tutta la sua generalità, rapidissimamente, quando, ricondotta tale questione ad un problema di Calcolo delle Variazioni, ci si giovi di un'opportuna estensione di un teorema di esistenza dell'estremo stabilito dal TONELLI.

Successivamente, metto in evidenza, con un semplicissimo esempio, che il massimo intervallo entro il quale esiste sempre la soluzione è precisamente quello determinato per mezzo del teorema di esistenza. Questo intervallo è quello stesso che il teorema dell'HAMMERSTEIN fa prevedere.

Osservo inoltre che la proposizione dimostrata per il problema di valori al contorno relativo all'equazione (1) può estendersi ad altre equazioni di tipo più generale della (1), e sotto condizioni meno restrittive di quelle dell'HIRSCHFELD.

Infine metto in rilievo che il procedimento della presente Nota si può estendere a problemi di valori al contorno relativi ad equazioni differenziali non lineari di ordine $2n$, quando si faccia uso di un'estensione di un mio teorema di esistenza dell'estremo per problemi variazionali di ordine n .

1. TEOREMA I. — *Se $g(x, y)$ è una funzione definita e continua per ogni (x, y) del campo A : $[0 \leq x \leq a_0; -\infty < y < +\infty]$, e se esistono due numeri h_1, h_2 , non negativi, in modo che sia, in tutto il campo A ,*

$$(3) \quad G(x, y) = \int_0^y g(x, t) dt \geq -h_1 y^2 - h_2;$$

(²) H. O. HIRSCHFELD, *A generalization of Picard's method of successive approximation*. (« Proceedings of the Cambridge philosophical Society », Vol. XXXI (1936), pp. 86-95).

allora l'equazione differenziale (1)

$$y'' = g(x, y)$$

ammette, in tutto l'intervallo $(0, a)$, con $0 < a \leq a_0$, e con

$$(4) \quad 0 < a < \frac{\pi}{\sqrt{2h_1}},$$

almeno una soluzione soddisfacente alle condizioni

$$(5) \quad y(0) = y(a) = 0.$$

Infatti, considerata la funzione

$$f(x, y, y') = \frac{1}{2} y'^2 + G(x, y),$$

le curve $y = y(x)$, $(0 \leq x \leq a)$, con $y(x)$ assolutamente continua, soddisfacente alle (5) e tale che esista finito l'integrale (del LE-BESGUE)

$$I_C = \int_0^a f(x, y(x), y'(x)) dx,$$

costituiscono una classe completa K .

Tenendo conto della (3), si deduce da un'opportuna generalizzazione di un teorema del TONELLI ⁽²⁾, che, se è soddisfatta la (4),

⁽²⁾ L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. (N. Zanichelli, Bologna), Vol. II, n.º 90, d), pp. 311-312.

Basta osservare che, sostituendo alla condizione 2º) di tale enunciato la seguente:

$$f(x, y, y') = \varphi(x, y') - \psi(x, y),$$

con

$$\varphi(x, y') \geq C_1 y'^2 - C_2; \quad \psi(x, y) \leq C_3 y^2 + C_4,$$

ove i C sono numeri non negativi, con $C_1 > 0$ e tale che sia

$$(I) \quad C_1 > C_3 \left(\frac{\Delta}{\pi} \right)^2,$$

e ferme restando tutte le altre ipotesi, esiste fra le curve ordinarie per le quali $y(a_1) = y(b_1) = 0$, con $a_1 < b_1$, $b_1 - a_1 < |\Delta|$, il minimo dell'integrale

$$I_C = \int_{a_1}^{b_1} f(x, y, y') dx.$$

Infatti, tenendo presente la disuguaglianza

$$\int_{a_1}^{b_1} y'^2(x) dx \geq \left(\frac{\pi}{b_1 - a_1} \right)^2 \int_{a_1}^{b_1} y^2(x) dx,$$

valida per $y(a_1) = y(b_1) = 0$, e riprendendo il ragionamento del TONELLI,

nella classe K esiste almeno una curva C_0 che rende minimo l'integrale I_C .

Siccome tutti i punti della curva C_0 , eccettuati quelli terminali sono interni al campo A e di indifferenza rispetto ad A e a K , e siccome la funzione f soddisfa alle condizioni di un noto teorema del TONELLI (⁴), la curva C_0 è un'estremale relativa alla funzione f , e soddisfa quindi all'equazione differenziale di EULERO (1) e alle condizioni (5). Il nostro asserto è così provato.

OSSERVAZIONE I. — Se, in luogo delle (5), sono soddisfatte le seguenti condizioni (supposte compatibili)

$$\begin{cases} \alpha_1 y(0) + \alpha_2 y(a) = \alpha_3, \\ \alpha_4 y(0) + \alpha_5 y(a) = \alpha_6, \end{cases}$$

ci si riconduce subito alle condizioni del precedente teorema con un opportuno cambiamento della funzione incognita, già indicato dall'HIRSCHFELD.

OSSERVAZIONE II. — Il metodo seguito nel presente n.° per l'equazione (1) può essere esteso immediatamente all'equazione

$$\Phi(x, y)y'' + \Phi_x(x, y)y' + \frac{1}{2} \Phi_y(x, y)y'^2 = g(x, y),$$

che è l'equazione di EULERO relativa all'integrale

$$\int_0^a \left[\frac{1}{2} \Phi(x, y)y'^2 + G(x, y) \right] dx,$$

supponendo, oltre alle ipotesi indicate nel precedente teorema, che la funzione $\Phi(x, y)$ sia continua in tutto A insieme con le sue derivate parziali Φ_x , Φ_y , e che verifichi la disuguaglianza

$$\Phi(x, y) \geq \sigma > 0.$$

abbiamo

$$\begin{aligned} I_C &\geq C_1 \int_{a_1}^{b_1} y'^2 dx - C_3 \left(\frac{b_1 - a_1}{\pi} \right)^2 \int_{a_1}^{b_1} y'^2 dx - (C_2 + C_4)(b_1 - a_1) \geq \\ &\geq \left[C_1 - C_3 \left(\frac{b_1 - a_1}{\pi} \right)^2 \right] \frac{(\bar{y} - \underline{y})^2}{b_1 - a_1} - (C_2 + C_4)(b_1 - a_1), \end{aligned}$$

ove $\bar{y}$ e $\underline{y}$ rappresentano la massima e la minima ordinata della curva C , e tenendo conto della (I) si conclude in modo analogo al TONELLI.

Nel problema in questione è $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_3 = h_1$, e la (I) si riduce alla (4).

(⁴) Vedi opera cit. in (³), n.° 97, p. 321.

Le nostre ipotesi sono dunque più generali di quelle dell'HIRSCHFELD (*).

2. ESEMPIO. — Mostriamo ora, con un semplicissimo esempio, che l'intervallo indicato nel teorema del n.º 1 è il massimo in cui esiste sempre la soluzione del problema in questione.

Si consideri l'equazione differenziale

$$(6) \quad y'' = -y + 1,$$

per la quale risulta

$$G(x, y) = -\frac{1}{2}y^2 + y.$$

Quindi, fissato un numero positivo ε , comunque piccolo, abbiamo per ogni y

$$G(x, y) = -\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)y^2 + y(\varepsilon y + 1) \geq -\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)y^2 - \frac{1}{4\varepsilon},$$

è perciò verificata la (3) per $h_1 = \frac{1}{2} + \varepsilon$, $h_2 = \frac{1}{4\varepsilon}$, e la (4) ci assicura che il problema di valori al contorno relativo all'equazione (6) e alle condizioni (5) ammette soluzione per $0 < a < \frac{\pi}{\sqrt{1+2\varepsilon}}$, ossia, siccome ε può prendersi comunque piccolo, per $0 < a < \pi$.

D'altra parte l'integrale generale della (6) è

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + 1,$$

ove C_1 e C_2 sono due costanti arbitrarie, e le condizioni (5), per $a = \pi$, richiederebbero

$$\begin{cases} C_2 + 1 = 0, \\ -C_2 + 1 = 0, \end{cases}$$

sistema evidentemente impossibile. Dunque il problema di valori al contorno considerato nel presente n.º non ammette soluzione per $a = \pi$. Quindi, se nella (4) è $a = \frac{\pi}{\sqrt{2h_1}}$, il teorema del n.º 1 non è più vero, ossia, in altre parole, alla (4) non può sostituirsi la disuguaglianza

$$0 < a < \frac{\pi}{\sqrt{2h_1}}(1 + \delta),$$

comunque si prenda piccolo il numero $\delta > 0$.

(*) Vedi luogo cit. in (*), p. 94.

3. TEOREMA II. — Passiamo ora allo studio dei problemi di valori al contorno relativi ad equazioni differenziali di ordine pari, maggiore di due, limitandoci, per semplicità di scrittura, al caso delle equazioni del quarto ordine. L'estensione ad equazioni di ordine più elevato è immediata.

Se $g_1(x, y')$ e $g_2(x, y)$ sono due funzioni definite e continue, insieme con le derivate parziali $\frac{\partial g_1}{\partial x}$, $\frac{\partial g_2}{\partial y}$, in tutto il campo $A^{[2]}$: $[0 \leq x \leq a_0; -\infty < y < +\infty; -\infty < y' < +\infty]$, e se esistono quattro numeri non negativi h_1, h_2, h_3, h_4 , in modo che si abbia in tutto $A^{[2]}$

$$G_1(x, y') = \int_0^{y'} g_1(x, t) dt \geq -h_1 y'^2 - h_2,$$

$$G_2(x, y) = \int_0^y g_2(x, t) dt \geq -h_3 y^2 - h_4,$$

l'equazione differenziale

$$(7) \quad y^{(4)} = \frac{d}{dx} g_1(x, y') - g_2(x, y),$$

ammette, in tutto l'intervallo $(0, a)$, con $0 < a \leq a_0$, e con

$$0 < a < \pi \frac{\sqrt{\sqrt{h_1^2 + 2h_3} - h_1}}{\sqrt{2h_3}},$$

$$\left(0, \text{rispettivamente, } 0 < a < \frac{\pi}{\sqrt{2h_1}}, \text{ se } h_3 = 0\right),$$

almeno una soluzione soddisfacente alle condizioni

$$y(0) = y(a) = y'(0) = y'(a) = 0.$$

Basta ripetere la dimostrazione del n.º 1 osservando che la (7) è l'equazione di EULERO relativa all'integrale

$$I_{C^{[2]}}^{[2]} = \int_0^a f(x, y, y', y'') dx,$$

con

$$f(x, y, y', y'') = \frac{1}{2} y''^2 + G_1(x, y') + G_2(x, y),$$

tenendo conto di un'estensione di un mio teorema per l'esistenza

dell'estremo ⁽⁶⁾ e infine di alcune proprietà delle curve minimanti l'integrale $I_{C^{[2]}}^{[2]}$ ⁽⁷⁾.

OSSERVAZIONE. — Possono farsi osservazioni analoghe a quelle fatte alla fine del n.º 1.

⁽⁶⁾ S. CINQUINI, *Sopra l'esistenza della soluzione nei problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine n.* (« Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », Serie II, Vol. V (1936), pp. 169-190), n.º 11.

Se alla condizione 2º) di tale enunciato si sostituisce la seguente:

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \equiv \varphi_n(x, y^{(n)}) - \sum_{r=0}^{n-1} \varphi_r(x, y^{(r)}), \quad (y^{(0)} \equiv y),$$

con

$$\varphi_n(x, u) \geq C_1 u^2 - C_2; \quad \varphi_r(x, u) \leq C_1^{(r)} u^2 + C_2^{(r)}, \quad (r=0, 1, 2, \dots, n-1),$$

ove i C sono numeri non negativi, con $C_1 > 0$ e tale che sia

$$C_1 > \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{\Delta}{\pi} \right)^{2(n-r)} \cdot C_1^{(r)},$$

tale corollario è ancora valido per le classi di curve $C^{[n]}$ soddisfacenti alle condizioni

$$y^{(r)}(a_1) = y^{(r)}(b_1) = 0, \quad (r=0, 1, 2, \dots, n-1; y^{(0)} \equiv y),$$

con $a_1 < b_1$ e $b_1 - a_1 \leq |\Delta|$.

⁽⁷⁾ Vedi S. CINQUINI, *Sopra le equazioni di Eulero dei problemi variazionali di ordine n.* (« Annali di Matematica pura ed applicata », Serie IV, T. XVI (1937), pp. 61-100), n.º 7, 10, 4.